

### 3 OBLICZANIE ROZPŁYWÓW MOCY

#### 3.1 Rozptyw mocy w zamkniętych sieciach elektroenergetycznych (SEE)

Obliczanie rozptyłów mocy ma na celu wyznaczenie stanu ustalonego sieci elektroenergetycznej prądu przemiennego, przy symetrycznym obciążeniu węzłów. Rozpatruje się więc jedynie sieć zgodną. Danymi wejściowymi są moce węzłowe i niektóre napięcia węzłowe. W wyniku obliczeń otrzymujemy moce w gałęziach sieci, straty mocy oraz brakujące w danych wejściowych napięcia i moce węzłowe. Wszystkie wymienione wielkości obliczamy z napięć węzłowych. Wyznaczenie napięć węzłowych, tj. wektora stanu  $\mathbf{X}$ , jest zadaniem każdej obecnie stosowanej metody obliczeniowej.

Z czterech wielkości charakteryzujących każdy węzeł (moc czynna, bierna, dwie składowe napięcia) należy znać dwie wielkości, aby móc wyznaczyć dwie pozostałe. Ogólnie wybór wielkości, które muszą być znane jest dowolny, choć zależy on od przyjętego modelu matematycznego sieci. Rozpatrzmy sieć liniową o  $N$  węzłach i  $M$  gałęziach. Stan sieci jest zdeterminowany wektorem wymuszeń, którego współrzędnymi jest  $2N$  zmiennych. Zmienne te wynikają z danych wejściowych dla węzłów, które dzielimy w następujący sposób:

1. dla węzłów odbiorczych (w liczbie  $O$ ) dane są moce odbierane czynne  $P$  i bierne  $Q$ ,
  2. dla węzłów generatorowych (w liczbie  $G$ ) dana jest moc czynna  $P$  i moduł napięcia  $U$ ,
  3. dla węzła bilansującego (jednego) zadaje się moduł napięcia  $U$  oraz jego fazę  $\delta = 0$ ,
- przy czym:

$$O + G + 1 = N \quad (3.1)$$

Wyznaczany wektor stanu  $\mathbf{X}$  ma za współrzędne napięcia w  $(N-1)$  węzłach sieci (napięcie w węzle bilansującym jest znane).

Napięcie w węzle można przedstawić w postaci trygonometrycznej i algebraicznej:

$$\underline{U}_i = U_i e^{j\delta_i} = U_{1i} + jU_{2i} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2)$$

Współrzędnymi wektora stanu może być  $(N-1)$  modułów  $U$ , oraz  $(N-1)$  kątów fazowych  $\delta$  lub  $(N-1)$  składowych  $U_1$  oraz składowych  $U_2$ . Składowe  $U_1, U_2$  wiąże  $G$  równań typu:

$$U_{1i}^2 + U_{2i}^2 - U_i^2 = 0 \quad (3.3)$$

Wszystkie inne wielkości są już łatwe do wyznaczenia, gdyż prąd, moce gałęziowe oraz straty mocy czynnej i biernej w gałęzi łatwo wyznaczyć z różnic napięć na gałęzi. Z powyższych napięć węzłowych tworzymy wektor stanu  $\mathbf{X}$  według poniższej zależności:

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T & \delta^T \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T & \mathbf{U}_2^T \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Moce węzłowe (tzn. moce dopływające do węzłów) i napięcia węzłowe, łączy następująca zależność nieliniowa:

$$\underline{S}_i = \underline{U}_i \underline{I}_i^* = U_i^2 \underline{Y}_{ii}^* + \underline{U}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \underline{U}_j^* \underline{Y}_{ij}^* \quad (3.5)$$

W równaniu (3.5) przyjęto, że napięcia są napięciami międzyprzewodowymi co w wyniku daje moce trójfazowe.

Moce węzłowe i moce odbierana w węzłach muszą być jednakowe, czyli:

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) - \mathbf{S}_z = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0 \quad (3.6)$$

gdzie:

$\mathbf{S}(\mathbf{X})$  - wektor obliczonych mocy węzłowych,

$\mathbf{S}_z$  - moce zadane w węzłach.

Na podstawie równania (3.6) można uzyskać następujące postacie równania  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ :

1. We współrzędnych biegunowych:

$$U_i^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_i U_j [G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)] - P_i = 0 \quad (3.7)$$

$$-U_i^2 B_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_i U_j [G_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)] - Q_i = 0 \quad (3.8)$$

co daje  $(N-1+0)$  równań.

Jednocześnie znamy  $G$  modułów napięć w węzłach generatorowych, czyli tyle samo jest równań i zadanych modułów napięć co współrzędnych wektora stanu:

$$(N-1+0) + G = (N+0+G+1) - 2 = 2(N-1) \quad (3.9)$$

2. We współrzędnych prostokątnych:

$$U_i^2 G_{ii} + U_{1i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (G_{ij} U_{1j} - B_{ij} U_{2j}) + U_{2i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (G_{ij} U_{2j} + B_{ij} U_{1j}) - P_i = 0 \quad (3.10)$$

$$-U_i^2 G_{ii} + U_{1i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (G_{ij} U_{2j} + B_{ij} U_{1j}) + U_{2i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (G_{ij} U_{1j} - B_{ij} U_{2j}) - Q_i = 0 \quad (3.11)$$

oraz mamy  $G$  równań (3.3), co daje w sumie:

$$(N-1+0)+G=2(N-1) \quad (3.12)$$

równań, czyli tyle samo co współrzędnych wektora stanu.

W powyższych równaniach oznaczono:

$\underline{S}_i = P_i + jQ_i$  - moc węzłowa dopływająca z zewnątrz sieci do węzła  $i$ -tego,

$\underline{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$  - element macierzy admitancyjnej sieci.

Równania (3.7) i (3.8) lub (3.10) i (3.11) są modelami matematycznymi stanu ustalonego, wyznaczonego obliczeniami rozplwowymi. Można tu wyróżnić następujące modele elementów:

- sieć - macierz  $\underline{Y}$ ,
- odbiory - stała moc P, Q,
- generatory - stała moc P i napięcie U,
- wybrany jeden generator - stałe napięcie.

Układ równań nieliniowych rozwiązuje się metodami iteracyjnymi, w tym celu należy je przedstawić w postaci:

$$\underline{\mathbf{X}}^{k+1} = \varphi(\underline{\mathbf{X}}^k) \quad (3.13)$$

przy czym, indeks górny oznacza numer iteracji, a  $\varphi$  jest wektorową funkcją iteracyjną. Wektor  $\underline{\mathbf{X}}_0$  spełniający poniższe równanie:

$$\underline{\mathbf{X}}_0 = \varphi(\underline{\mathbf{X}}_0) \quad (3.14)$$

nazywa się punktem stałym (niezmienniczym) przekształcenia i jest szukanym rozwiązaniem.

W przypadku równań rozptywu mocy interesujące jest:

- czy metoda jest zbieżna przy każdym punkcie startowym,
- czas obliczeń jednej iteracji,
- rząd p zbieżności metody lub liczba iteracji dających rozwiązanie o wystarczającej dokładności.

Warunki zbieżności procesu iteracyjnego są następujące:

1. Jeśli funkcja  $\varphi(\underline{\mathbf{X}})$  jest różniczkowalna i wypukła w pewnym otoczeniu punktu  $\underline{\mathbf{X}}_0$ , to warunkiem zbieżności jest:

$$\rho = \max_{j \in \{W\}} (\lambda_j) < 1 \quad (3.15)$$

gdzie:

$\{W\}$  - zbiór numerów zmiennych niezależnych;

$\lambda_j$  - wartości własne macierzy Jacobiego funkcji wektorowej  $\varphi(\underline{\mathbf{X}})$  w punkcie  $\underline{\mathbf{X}}_0$  obliczone z wzoru:

$$\det[\mathbf{J}(\underline{\mathbf{X}}_0) - \lambda_j \mathbf{I}] = 0 \quad (3.16)$$

Macierz Jacobiego  $\mathbf{J}(\underline{\mathbf{X}}_0)$  zdefiniowana jest następująco:

$$\mathbf{J}(\underline{\mathbf{X}}_0) = \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]_{x=x_0} \quad \text{dla } i, j \in \{W\} \quad (3.17)$$

gdzie:

i - numer wiersza,

j - numer kolumny.

2. Jeśli istnieje liczba naturalna p większa lub równa jedności oraz rzeczywista c taka, że:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\underline{\mathbf{X}}^{k+1} - \underline{\mathbf{X}}_0\|}{\|\underline{\mathbf{X}}^k - \underline{\mathbf{X}}_0\|^p} = c \quad (3.18)$$

to  $p$  nazywamy rzędem zbieżności metody iteracyjnej.

### 3.2 Metody obliczania napięć węzłowych w sieciach zamkniętych

#### 3.2.1 Metoda Gaussa

Technika iteracyjna Gaussa wymaga przedstawienia rozwiązywanego układu równań do postaci z równania (3.13). Iteracje te powtarza się tak długo, dopóki poprawki napięciowe we wszystkich węzłach sieci będą miały wartość mniejszą od założonej dokładności obliczania modułów napięć węzłowych ( $\varepsilon$ ) tzn.:

$$|\Delta \underline{U}_i^{k+1}| = |\underline{U}_i^{k+1} - \underline{U}_i^k| < \varepsilon \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N \quad (3.19)$$

W metodzie tej funkcję iteracyjną uzyskuje się z odpowiednio przekształconego równania (3.5) co zapewnia optymalną zbieżność procesu iteracyjnego:

$$\underline{U}_i^{k+1} = \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \left( \frac{P_i - jQ_i}{\underline{U}_i^{*k}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \underline{Y}_{ij} \underline{U}_j^k \right) \quad (3.20)$$

Po przedstawieniu równania (3.20) we współrzędnych prostokątnych, otrzymuje się gotowe wzory iteracyjne:

$$U_{1i}^{k+1} = a_{ii} \frac{U_{1i}^k}{(U_i^k)^2} + b_{ii} \frac{U_{2i}^k}{(U_i^k)^2} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} U_{1j}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N b_{ij} U_{2j}^k \quad (3.21)$$

$$U_{2i}^{k+1} = -b_{ii} \frac{U_{1i}^k}{(U_i^k)^2} + a_{ii} \frac{U_{2i}^k}{(U_i^k)^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N b_{ij} U_{1j}^k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} U_{2j}^k \quad (3.22)$$

gdzie odpowiednie współczynniki mają postać:

$$a_{ii} = \frac{P_i G_{ii} - Q_i B_{ii}}{Y_{ii}^2} \quad (3.23)$$

$$b_{ii} = \frac{P_i B_{ii} + Q_i G_{ii}}{Y_{ii}^2} \quad (3.24)$$

$$a_{ij} = \frac{G_{ij}G_{ii} + B_{ij}B_{ii}}{Y_{ii}^2} \quad (3.25)$$

$$b_{ij} = \frac{G_{ij}B_{ii} - B_{ij}G_{ii}}{Y_{ii}^2} \quad (3.26)$$

Z wzorów (3.21) i (3.22) możemy korzystać w przypadku obliczeń dla węzła odbiorczego. Dla węzła generatorowego tworzymy dodatkową pętlę, w której obliczamy:

- moc bierną węzłową z wzoru (3.11),
- napięcie w tym węźle z wzorów (3.21) i (3.22),
- różnicę między obliczonym napięciem a napięciem założonym jako stałe dla tego węzła. Gdy różnica ta jest mniejsza od założonej poprawki napięciowej kończymy proces iteracyjny dla tego węzła.

Występuje tutaj zależność od punktu startowego, lecz tylko w sieciach źle uwarunkowanych (wielkie obciążenia węzłów odbiorczych, długie linie promieniowe silnie obciążone). Rząd zbieżności jest pierwszy ( $p=1$ ), a czas obliczeń jednej iteracji jest krótki. Konieczna jest jednak duża liczba iteracji dla uzyskania wystarczającej zbieżności obliczeń.

### 3.2.2 Metoda Gaussa - Seidla

Funkcja iteracyjna jest tu taka sama jak w metodzie Gaussa, lecz podstawia się do niej napięcia już wyznaczone w iteracji  $(k+1)$ -szej, napięcia pozostałych węzłów bierze się z iteracji  $k$ -tej, a więc w obliczeniu napięcia w  $i$ -tym węźle, w iteracji  $(k+1)$ -szej wykorzystuje się napięcia:

$$\underline{\mathbf{U}}^{k+1} = [\underline{U}_1^{k+1}, \dots, \underline{U}_{i-1}^{k+1}, \underline{U}_i^k, \underline{U}_{i+1}^k, \dots, \underline{U}_N^k]^T \quad (3.27)$$

Jest to właściwie metoda Gaussa z relaksacyjnym prowadzeniem iteracji zaproponowanym przez Seidla.

### 3.2.3 Metoda klasyczna Newtona-Raphsona

W metodzie klasycznej Newtona-Raphsona funkcję iteracyjną tworzy się, wykorzystując liniowe przybliżenia przyrostów funkcji (rozkład na szereg Taylora):

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) + \mathbf{J}^k \Delta \mathbf{X}^k = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

a więc:

$$\Delta \mathbf{X}^k = -(\mathbf{J}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (3.29)$$

Macierz Jacobiego wyznaczona w punkcie  $\mathbf{X}^k$  jest postaci:

$$\mathbf{J}^k = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^k} \quad (3.30)$$

Z równania (3.29) wynika zależność iteracyjna:

$$\underline{\mathbf{X}}^{k+1} = \underline{\mathbf{X}}^k + \Delta \underline{\mathbf{X}}^k = \underline{\mathbf{X}}^k - (\mathbf{J}^k)^{-1} \mathbf{F}(\underline{\mathbf{X}}^k) \quad (3.31)$$

Metoda ta jest szybko zbieżna ( $p=2$ ), lecz zależnie od punktu startowego może prowadzić do rozwiązania niepodstawowego. Tworzenie macierzy Jacobiego i jej odwrotności w każdym kroku jest bardzo pracochłonne. Równanie (3.27) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{F}(\underline{\mathbf{X}}^k) = \Delta \mathbf{S}^k = -\mathbf{J}^k \Delta \underline{\mathbf{X}}^k \quad (3.32)$$

Równanie powyższe w układzie współrzędnych biegunowych, po pominięciu indeksu górnego oznaczającego numer iteracji, można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\Delta P_i = P_{i\text{zad}} - P_{i\text{obl}} \quad (3.34)$$

$$\Delta Q_i = Q_{i\text{zad}} - Q_{i\text{obl}} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{H} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \Delta \delta_j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{i\text{zad}}}{\partial \Delta \delta_j} - \frac{\partial P_{i\text{obl}}}{\partial \Delta \delta_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{i\text{obl}}}{\partial \Delta \delta_j} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{i\text{obl}}}{\partial \Delta U_j} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_{i\text{obl}}}{\partial \Delta \delta_j} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_{i\text{obl}}}{\partial \Delta U_j} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

gdzie:

$P_{i\text{zad}}, Q_{i\text{zad}}$  - wielkości mocy zadanych w węźle  $i$ -tym;

$P_{i\text{obl}}, Q_{i\text{obl}}$  - wielkości mocy w  $i$ -tym węźle obliczone z wzorów, np. (3.7), (3.8).

Podmacierze  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{L}$  macierzy Jacobiego można obliczyć z wzorów od (3.36) do (3.39).

Powstają wtedy dwa przypadki:

1.  $k \neq i$

$$H_{ki} = \frac{\partial P_{k\text{obl}}}{\partial \delta_i} = U_k U_i (G_{ki} \sin \delta_{ki} - B_{ki} \cos \delta_{ki}) \quad (3.40)$$

$$N_{ki} = \frac{\partial P_{kobl}}{\partial U_i} = U_k (G_{ki} \cos \delta_{ki} + B_{ki} \sin \delta_{ki}) \quad (3.41)$$

$$M_{ki} = \frac{\partial Q_{kobl}}{\partial \delta_i} = -U_k U_i (G_{ki} \cos \delta_{ki} + B_{ki} \sin \delta_{ki}) \quad (3.42)$$

$$L_{ki} = \frac{\partial Q_{kobl}}{\partial U_i} = U_k (G_{ki} \sin \delta_{ki} - B_{ki} \cos \delta_{ki}) \quad (3.43)$$

2.  $k=i$

$$H_{kk} = \frac{\partial P_{kobl}}{\partial \delta_k} = -U_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [U_j (G_{kj} \sin \delta_{kj} - B_{kj} \cos \delta_{kj})] \quad (3.44)$$

$$N_{kk} = \frac{\partial P_{kobl}}{\partial U_k} = 2U_k G_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [U_j (G_{kj} \cos \delta_{kj} + B_{kj} \sin \delta_{kj})] \quad (3.45)$$

$$M_{kk} = \frac{\partial Q_{kobl}}{\partial \delta_k} = U_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [U_j (G_{kj} \cos \delta_{kj} + B_{kj} \sin \delta_{kj})] \quad (3.46)$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_{kobl}}{\partial U_k} = -2U_k B_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [U_j (G_{kj} \sin \delta_{kj} - B_{kj} \cos \delta_{kj})] \quad (3.47)$$

lub w postaci:

$$H_{kk} = -Q_k - B_{kk} U_k^2 \quad (3.48)$$

$$N_{kk} = \frac{P_k}{U_k} + G_{kk} U_k \quad (3.49)$$

$$M_{kk} = P_k - G_{kk} U_k^2 \quad (3.50)$$

$$L_{kk} = \frac{Q_k}{U_k} - B_{kk} U_k \quad (3.51)$$

Podobne wyprowadzenie można by wykonać w przypadku przedstawienia wektora szukanych napięć węzłowych w układzie współrzędnych prostokątnych:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_1 \\ \Delta \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

1.  $k \neq i$

$$H_{ki} = \frac{\partial P_{kobl}}{\partial \delta_i} = I_{1i} U_{2k} - I_{2i} U_{1k} \quad (3.53)$$

$$N_{ki} = \frac{\partial P_{kobl}}{\partial U_i} = \frac{I_{1i} U_{1k} + I_{2i} U_{2k}}{U_i} \quad (3.54)$$

$$M_{ki} = \frac{\partial Q_{kobl}}{\partial \delta_i} = -I_{1i} U_{1k} - I_{2i} U_{2k} \quad (3.55)$$

$$L_{ki} = \frac{\partial Q_{kobl}}{\partial U_i} = \frac{I_{1i} U_{2k} - I_{2i} U_{1k}}{U_i} \quad (3.56)$$

gdzie:

$$\underline{I}_i = I_{1i} + jI_{2i} = \sum_{j=1}^N \underline{U}_j \underline{Y}_{ij} \quad (3.57)$$

2.  $k=i$  wzory od (3.48) do (3.51).

### 3.2.4 Zmodyfikowana metoda Newtona

Funkcja iteracyjna ma tu postać:

$$\underline{\mathbf{X}}^{k+1} = \underline{\mathbf{X}}^k - (\mathbf{J}^1)^{-1} \mathbf{F}(\underline{\mathbf{X}}^k) \quad (3.58)$$

gdzie:

$\mathbf{J}^1$  - jest macierzą Jacobiego, wyznaczoną w punkcie startowym.

Najbardziej pracochłonną operację (odwracanie macierzy Jacobiego) przeprowadza się tylko jeden raz. Pozostałe własności - jak w metodzie klasycznej, lecz liczba iteracji jest większa.

### 3.2.5 Rozłączna metoda Newtona

Funkcja iteracyjna w metodzie Newtona-Raphsona składa się z grupy zawierającej moce czynne P oraz grupy, zawierającej moce bierne Q, które zapisano następująco:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}^k \\ \Delta \mathbf{Q}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^k & \mathbf{N}^k \\ \mathbf{M}^k & \mathbf{L}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta^k \\ \Delta \mathbf{U}^k \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Okazuje się, że podmacierze poza główną przekątną mają elementy o wartościach bliskich zeru, można więc je pominąć i przyjąć, że:



$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}^k \\ \Delta \mathbf{Q}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^k & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta^k \\ \Delta \mathbf{U}^k \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Funkcje iteracyjne przybierają wtedy postać:

$$\delta^{k+1} = \delta^k - (\mathbf{H}^k)^{-1} \Delta \mathbf{P}^k = \delta^k - (\mathbf{J}_{P\delta}^k)^{-1} \Delta \mathbf{P}^k \quad (3.61)$$

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k - (\mathbf{L}^k)^{-1} \Delta \mathbf{Q}^k = \mathbf{U}^k - (\mathbf{J}_{QU}^k)^{-1} \Delta \mathbf{Q}^k \quad (3.62)$$

Nastąpiła tu dekompozycja rodzajowa zmiennych, pozwalająca odwracać zamiast macierzy dużej o wymiarze  $(2N-2)*(2N-2)$ , dwie macierze mniejsze o wymiarze  $(N-1)*(N-1)$ , co zmniejsza znacznie pracochłonność w każdej iteracji. Metoda ta odpowiada założeniu, że na wielkość mocy czynnej wpływa jedynie kąt  $\delta$ , a na wielkości mocy biernej - moduł napięcia.

### 3.2.6 Metoda Stotta

W metodzie Stotta funkcja iteracyjna jest postaci:

$$\delta^{k+1} = \delta^k - (\mathbf{H}^1)^{-1} \Delta \mathbf{P}^k \quad (3.63)$$

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k - (\mathbf{L}^1)^{-1} \Delta \mathbf{Q}^k \quad (3.64)$$

Podmacierze będące częściami Jacobianu odwraca się tutaj tylko raz w pierwszym kroku iteracyjnym, co jeszcze bardziej zmniejsza czasochłonność obliczeń.

### 3.2.7 Metoda van Nessa.

Jest to modyfikacja metody Newtona-Rapsona, polegająca na pominięciu w macierzy Jacobiego elementów wzajemnych, tzn.:

$$H_{ij} = L_{ij} = N_{ij} = M_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad j \neq i \quad (3.65)$$

Wszystkie wyrazy diagonalne w podmacierzach  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  oraz  $\mathbf{L}$  są różne od zera, czyli:

$$H_{ii} \neq 0 \quad (3.66)$$

$$N_{ii} \neq 0 \quad (3.67)$$

$$M_{ii} \neq 0 \quad (3.68)$$

$$L_{ii} \neq 0 \quad (3.69)$$

Odpowiada to założeniu, że na wielkości mocy w węzle i-tym nie mają wpływu wielkości napięcia w pozostałych węzłach systemu. Po przegrupowaniu zmiennych uzyskuje się macierz Jacobiego w postaci macierzy quazidiagonalnej o podmacierzach na diagonalu stopnia  $2 \times 2$ .

$$\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} H_{jj} & N_{jj} \\ M_{jj} & L_{jj} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Odwraca się więc tu (N-1) macierzy stopnia 2x2. Rząd zbieżności metody p=1 a liczba iteracji jest duża, zwłaszcza przy nieodpowiednio dobranym punkcie startowym. Współczynniki podmacierzy Jacobiego, wykorzystywane w metodzie van Nessa, mają postać:

$$H_{jj} = \frac{\partial P_j}{\partial \delta_j} = -Q_j - B_{jj}U_j^2 \quad (3.71)$$

$$N_{jj} = \frac{\partial P_j}{\partial U_j} = \frac{P_j}{U_j} + G_{jj}U_j \quad (3.72)$$

$$M_{jj} = \frac{\partial Q_j}{\partial \delta_j} = P_j - G_{jj}U_j^2 \quad (3.73)$$

$$L_{jj} = \frac{\partial Q_j}{\partial U_j} = \frac{Q_j}{U_j} - B_{jj}U_j \quad (3.74)$$

Odwracanie podmacierzy Jacobiego  $\mathbf{J}_j$  zastępuje się każdorazowo rozwiązywaniem układu równań liniowych:

$$\Delta P_j = H_{jj}\Delta\delta_j + N_{jj}\Delta U_j \quad (3.75)$$

$$\Delta Q_j = M_{jj}\Delta\delta_j + L_{jj}\Delta U_j \quad (3.76)$$

Daje to możliwość korzystania z gotowych wzorów na poprawki modułu i argumentu napięcia w j-tym węźle:

$$\Delta U_j = \frac{\frac{M_{jj}\Delta P_j}{H_{jj}} - \Delta Q_j}{\frac{N_{jj}M_{jj}}{H_{jj}} - L_{jj}} \quad (3.77)$$

$$\Delta\delta_j = \frac{\Delta P_j - \Delta U_j N_{jj}}{H_{jj}} \quad (3.78)$$

W przypadku węzła generatorowego można przyjąć, że  $\Delta U_j = 0$ .

### 3.2.8 Metoda Warda - Hale'a.

Różni się od metody van Nessa jedynie tym, że funkcje przedstawione są we współrzędnych prostokątnych (patrz wzory (3.7)).

### 3.3 Uwzględnienie współczynników relaksacji

Uwzględnienie współczynników relaksacji polega na zmianie obliczonej poprawki napięciowej o pewną wartość:

1. współrzędne prostokątne:

$$U1_i^{k+1} = U1_i^k + k\Delta U1_i^{k+1} = U1_i^k + k(U1_i^{k+1} - U1_i^k) \quad (3.79)$$

$$U2_i^{k+1} = U2_i^k + k\Delta U2_i^{k+1} = U2_i^k + k(U2_i^{k+1} - U2_i^k) \quad (3.80)$$

2. współrzędne biegunowe:

$$U_i^{k+1} = U_i^k + k\Delta U_i^{k+1} = U_i^k + k(U_i^{k+1} - U_i^k) \quad (3.81)$$

$$\delta_i^{k+1} = \delta_i^k + k\Delta\delta_i^{k+1} = \delta_i^k + k(\delta_i^{k+1} - \delta_i^k) \quad (3.82)$$

W przypadku gdy:

1.  $k > 1$  to mamy do czynienia z tzw. metodą nadrelaksacji a współczynniki nazywamy współczynnikami nadrelaksacji,
2.  $k < 1$  to mamy do czynienia z tzw. metodą podrelaksacji a współczynniki nazywamy współczynnikami podrelaksacji,

Współczynnik relaksacji ustala się doświadczalnie w zależności od wielkości sieci i stopnia jej obciążenia. W przypadku realnych sieci elektroenergetycznych przyjmuje się  $k=1,1-1,6$ .

### 3.4 Metody obliczeń napięć węzłowych zastosowanych w programie.

Program obliczeniowy, zastosowany w ćwiczeniu, wykorzystuje następujące metody obliczenia napięć węzłowych w analizowanej sieci elektroenergetycznej:

- a) metodę Gaussa-Seidla,
- b) metodę Newtona-Raphsona,
- c) zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona,
- d) rozłączną metodę Newtona-Raphsona,
- e) metodę Stotta,
- f) metodę van Nessa,
- g) metodę hybrydową.

W metodzie hybrydowej obliczone w kilku iteracjach Gaussa-Seidla napięcia węzłowe, tworzą odpowiedni zbiór punktów startowych dla innych metod:

- a) metody Newtona-Raphsona,
- b) metody Stotta,
- c) metody van Nessa,

zapewniając zbieżność jej obliczeń.

Punkty startowe dla iteracji Gaussa-Seidla lub dla innych metod zadane są następująco:

- a) W węzłach odbiorczych:

$$U1_j^0 = U_{Nj} \quad U2_j^0 = 0 \quad \text{dla } j=1,2,\dots,0 \quad (3.83)$$

lub

$$U_j^0 = U_{Nj} \quad \delta_j^0 = 0 \quad \text{dla } j=1,2\dots O \quad (3.84)$$

gdzie:

- $U_{Nj}$  - napięcie znamionowe j-tego węzła.

b) W węzłach generacyjnych:

$$U1_j^0 = U_j \quad U2_j^0 = 0 \quad \text{dla } j=1,2\dots G \quad (3.85)$$

lub

$$U_j^0 = U_j \quad \delta_j^0 = 0 \quad \text{dla } j=1,2\dots G \quad (3.86)$$

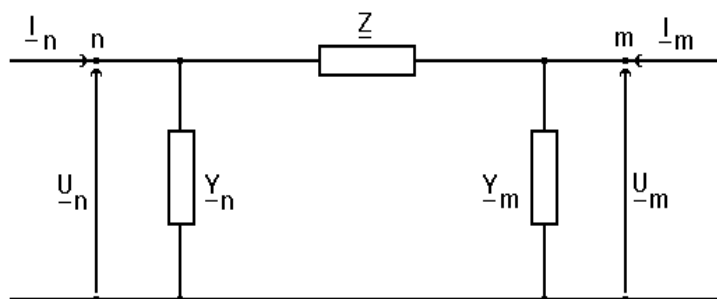
gdzie:

- $U_j$  - napięcie zadane w węzle generacyjnym.

W programie przyjęto jednolity, dla różnych metod obliczania napięć węzłowych, sposób przerywania procesu iteracyjnego i uznawania otrzymanych wyników za prawidłowe. Tym kryterium jest wartość niebilansowania mocy w węzle, zadawane przez obsługującego program. Również uznawanie procesu obliczeniowego za rozbieżny jest oparte o wartość niebilansowania mocy w węzle.

### 3.5 Obliczenia w sieci wielonapięciowej

Rozpatrzmy czwórnik typu łączący węzły n oraz m.



Rys. 3.1. Schemat zastępczy gałęzi w postaci czwornika typu II.

Równanie potencjałów węzłowych tego elementu jest postaci :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_n \\ \underline{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{nn} & \underline{Y}_{nm} \\ \underline{Y}_{mn} & \underline{Y}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_n \\ \underline{U}_m \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

lub

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} \quad (3.88)$$

przy czym admitywance własne i wzajemne występujące we wzorze (3.87) można uzależnić od impedancji czwornika:

$$\underline{Y}_{nm} = \underline{Y}_n + \frac{1}{\underline{Z}} \quad (3.89)$$

$$\underline{Y}_{mm} = \underline{Y}_m + \frac{1}{\underline{Z}} \quad (3.90)$$

$$\underline{Y}_{nm} = \underline{Y}_{mn} = -\frac{1}{\underline{Z}} \quad (3.91)$$

Załóżmy, że węzły n oraz m chcemy mieć na innym poziomie napięcia. Oznaczamy, że węzeł n na nowym poziomie napięcia jako n' a węzeł m jako m'. Przeliczenie napięć  $\underline{U}_n, \underline{U}_m$  na nowe poziomy napięcia można zapisać w postaci:

$$\underline{U}_{n'} = \underline{U}_n \underline{g}_n \quad (3.92)$$

$$\underline{U}_{m'} = \underline{U}_m \underline{g}_m \quad (3.93)$$

gdzie:

$\underline{g}_n, \underline{g}_m$  - przekładnie sprowadzające napięcia węzłów n oraz m na nowe poziomy napięcia.

Równania (3.92) i (3.93) można zapisać macierzowo :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{n'} \\ \underline{U}_{m'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_n & 0 \\ 0 & \underline{g}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_n \\ \underline{U}_m \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

lub

$$\underline{U}' = \underline{T} \underline{U} \quad (3.95)$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{g}_n & 0 \\ 0 & \underline{g}_m \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Zależność między prądami węzłowymi na starym i nowym poziomie napięcia będzie postaci:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{n'} \\ \underline{I}_{m'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{g}_n^*)^{-1} & 0 \\ 0 & (\underline{g}_m^*)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_n \\ \underline{I}_m \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

lub

$$\underline{I}' = (\underline{T}^*)^{-1} \underline{I} \quad (3.98)$$

Wyjściowe równanie potencjałów węzłowych (3.88) przeliczamy na nowe poziomy napięcie następująco:

$$(\underline{T}^*)^{-1} \underline{I} = (\underline{T}^*)^{-1} \underline{Y} (\underline{T})^{-1} \underline{T} \underline{I} \quad (3.99)$$

otrzymując:

$$\underline{I}' = \underline{Y}' \underline{U}' \quad (3.100)$$

gdzie :

$$\underline{Y}' = (\underline{T}^*)^{-1} \underline{Y} (\underline{T})^{-1} \quad (3.101)$$

Przekształcenie równania (3.88) do postaci (3.100) jest przekształceniem liniowym, unitarnym i nazywane jest przekształceniem "sprowadzenia". Gdyby to przekształcenie zastosować do macierzy impedancyjnej węzłowej sieci to macierz sprowadzona jest postaci :

$$\underline{Z}' = \underline{T} \underline{Z} \underline{T}^* \quad (3.102)$$

Podstawiając elementy macierzy admitancyjnej do wzoru (3.101) otrzymamy macierz admitancyjną sieci sprowadzoną:

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{nn} \frac{1}{g_n^2} & \underline{Y}_{nm} \frac{1}{g_n^* g_m} \\ \underline{Y}_{mn} \frac{1}{g_n g_m^*} & \underline{Y}_{mm} \frac{1}{g_m^2} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Powyższa macierz jest niesymetryczna, nie posiada, więc swego odpowiednika w postaci obwodu elektrycznego pasywnego jak wyjściowa macierz admitancyjna. Gdy przekładnie sprowadzenia są liczbami rzeczywistymi, co zazwyczaj ma miejsce, to macierz ta jest wyrażona następującym wzorem:

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{nn} \frac{1}{g_n^2} & \underline{Y}_{nm} \frac{1}{g_n g_m} \\ \underline{Y}_{mn} \frac{1}{g_n g_m} & \underline{Y}_{mm} \frac{1}{g_m^2} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

lub

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} \left( \underline{Y}_n + \frac{1}{\underline{Z}} \right) \frac{1}{g_n^2} & -\frac{1}{\underline{Z}} \frac{1}{g_n g_m} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} \frac{1}{g_n g_m} & \left( \underline{Y}_m + \frac{1}{\underline{Z}} \right) \frac{1}{g_m^2} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Macierz admitancyjna sieci sprowadzana jest teraz symetryczna. Można więc zbudować obwód elektryczny będący odpowiednikiem macierzy określonej wzorem (3.105).

Rozpatrzmy przypadek szczególny tego przekształcenia, a mianowicie gdy dokonujemy przekształcenia sprowadzenia elementu z jednego poziomu napięcia na drugi, czyli gdy :

$$\underline{g}_n = \underline{g}_m = \underline{g} \quad (3.106)$$

Macierz admitancyjna sieci sprowadzona jest postaci :

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} \left( \underline{Y}_n + \frac{1}{\underline{Z}} \right) \frac{1}{g^2} & -\frac{1}{\underline{Z}} \frac{1}{g^2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} \frac{1}{g^2} & \left( \underline{Y}_m + \frac{1}{\underline{Z}} \right) \frac{1}{g^2} \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Drugim typowym wariantem przekształcenia sprowadzenia jest jego zastosowanie dla gałęzi z transformatorem. Założono, że impedancje gałęzi obliczono na poziomie napięcia węzła n a przekładnia transformatora zdefiniowano jako:

$$\underline{g}_T = \frac{\underline{U}_n}{\underline{U}_m} \quad (3.108)$$

Z wzoru (3.108) wynika, że w rozpatrywanej gałęzi jest zainstalowany transformator posiadający regulację podłużną i poprzeczną. Uwzględniając wzory ogólne operacji sprowadzenia (3.95) w danym przypadku mamy:

$$\underline{g}_n = 1 \quad (3.109)$$

$$\underline{g}_m = \frac{1}{\underline{g}_T} \quad (3.110)$$

Podstawiając (3.109) i (3.110) do (3.103) otrzymujemy macierz admitancyjną tej gałęzi o postaci:

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} \left( \underline{Y}_n + \frac{1}{\underline{Z}} \right) & -\frac{1}{\underline{Z}} \underline{g}_T \\ -\frac{1}{\underline{Z}} \underline{g}_T^* & \left( \underline{Y}_m + \frac{1}{\underline{Z}} \right) \underline{g}_T^2 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Powyższa macierz jest macierzą niesymetryczną, nie można więc dla transformatora z regulacją poprzeczną narysować schematu zastępczego.

W przypadku, gdy zainstalowany w rozpatrywanej gałęzi transformator posiada tylko regulację podłużną, tzn.:

$$\underline{g}_T = g_T \quad (3.112)$$

wtedy macierz admitancyjna gałęzi wyraża się wzorem :

$$\underline{Y}' = \begin{bmatrix} \left( \underline{Y}_n + \frac{1}{\underline{Z}} \right) & -\frac{1}{\underline{Z}} g_T \\ -\frac{1}{\underline{Z}} g_T & \left( \underline{Y}_m + \frac{1}{\underline{Z}} \right) g_T^2 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

Powyższa macierz jest macierzą symetryczną, można więc dla transformatora z regulacją podłużną narysować schemat zastępczy.

W obliczeniach rozptyłów mocy w sieci wielonapięciowej sposób postępowania zazwyczaj jest taki, że wszystkie gałęzie zastępujemy macierzą admitancyjną określoną wzorem (3.111) przy czym, gdy w danej gałęzi nie ma transformatora to  $\vartheta_T = 1$ . Napięcia i prądy węzłowe są wtedy na ich rzeczywistym poziomie napięcia. Znając macierze admitancyjne gałęzi sieci możemy obliczyć macierz admitancyjną całej sieci, a następnie rozwiązywać iteracyjnie odpowiedni układ równań nieliniowych, opisanych w poprzednich rozdziałach.

Chcąc obliczyć moc w gałęzi łączącej węzły  $m$  oraz  $n$  trzeba skorzystać z równań (3.6) i (3.97). Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\underline{S}_n = \frac{U_n^2}{\underline{Z}^*} - \frac{U_n U_m^* \vartheta_T^*}{\underline{Z}^*} + U_n^2 \underline{Y}_n^* \quad (3.114)$$

$$\underline{S}_m = \frac{U_m^2 \vartheta_T^2}{\underline{Z}^*} - \frac{U_m U_n^* \vartheta_T}{\underline{Z}^*} + U_m^2 \underline{Y}_m^* \vartheta_T^2 \quad (3.115)$$

Stosując powyższe wzory otrzymujemy moce odpływające jako dodatnie tak jak we wzorze (3.6). Straty poprzeczne w linii to suma ostatnich składników z tych wzorów. Straty podłużne można obliczyć jako sumę mocy obliczonych za pomocą wzorów (3.114) i (3.115) pomniejszoną o straty poprzeczne, pamiętając o znakach.