

2. OBLICZANIE PRZEPLYWÓW MOCY

2.1. Przepływ mocy w układzie promieniowym

2.1.1. Założenia dla obliczeń mocy

Moc pozorna wyraża się wzorem:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U I e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U I e^{j\varphi} \quad (2.1)$$

gdzie:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

W układzie trójfazowym będzie:

$$\underline{S} = 3 \underline{U} \underline{I}^* = 3 U I e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = 3 U I e^{j\varphi} \quad (2.2)$$

Gdyby napięcie było napięciem międzyprzewodowym to mamy:

$$\underline{S} = \sqrt{3} \underline{U} \underline{I}^* = \sqrt{3} U I e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \sqrt{3} U I e^{j\varphi} \quad (2.3)$$

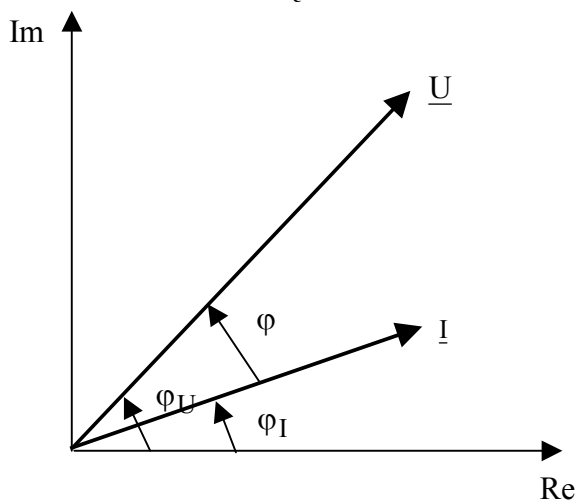
Przy czym:

$$\underline{S} = S (\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ \quad (2.4)$$

Tym wzorom odpowiada wykres wskazowy pokazany na rys. 2.1.

Przyjmujemy, że kierunek dodatni to prąd odbierany z węzła. Z tego założenia wynika, że:

- 1) Moc czynna pobierana z węzła jest dodatnia a moc dostarczana do węzła ujemna,
- 2) Moc bierna indukcyjna pobierana z węzła jest dodatnia tzn. że moc bierna pojemnościowa pobierana do węzła ujemna,
- 3) Moc bierna indukcyjna dostarczana do węzła jest ujemna tzn. że moc bierna pojemnościowa dostarczana do węzła dodatnia.



Rys. 2.1 Wykres wskazowy napięcia i prądu.

2.1.2. Obliczenia napięć:

Rozpatrując odcinek linii pomiędzy węzłami A i B a zawierający jedynie elementy wzdłużne i uwzględniając napięcia międzyprzewodowe można napisać:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_B + \Delta \underline{U}_{AB} = \underline{U}_B + \sqrt{3} \underline{Z}_L \underline{I}_B \quad (2.5)$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{S}_B^*}{\sqrt{3} \underline{U}_B^*} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{U}_{AB} &= \frac{(\underline{R}_L + j\underline{X}_L)(\underline{P}_B - j\underline{Q}_B)}{\underline{U}_B^*} = \\ &= \frac{\underline{P}_B \underline{R}_L + \underline{Q}_B \underline{X}_L}{\underline{U}_B^*} + j \frac{\underline{P}_B \underline{X}_L - \underline{Q}_B \underline{R}_L}{\underline{U}_B^*} = \\ &= \left(\frac{\underline{P}_B \underline{R}_L + \underline{Q}_B \underline{X}_L}{\underline{U}_B^2} + j \frac{\underline{P}_B \underline{X}_L - \underline{Q}_B \underline{R}_L}{\underline{U}_B^2} \right) \underline{U}_B \end{aligned} \quad (2.7)$$

W przypadku, gdy można założyć, że $\underline{U}_B = U_B$ (można to przyjąć w dowolnym miejscu) to:

$$\underline{U}_A = U_B + \frac{\underline{P}_B \underline{R}_L + \underline{Q}_B \underline{X}_L}{U_B} + j \frac{\underline{P}_B \underline{X}_L - \underline{Q}_B \underline{R}_L}{U_B} \quad (2.8)$$

Moduł napięcia w węźle początkowym wynosi:

$$U_A = \sqrt{\left(U_B + \frac{\underline{P}_B \underline{R}_L + \underline{Q}_B \underline{X}_L}{U_B} \right)^2 + \left(\frac{\underline{P}_B \underline{X}_L - \underline{Q}_B \underline{R}_L}{U_B} \right)^2} \quad (2.9)$$

2.1.3. Obliczanie strat mocy

Wzdłużne straty mocy w rozpatrywanej linii będą wynosić:

$$\Delta P_L = 3 \underline{I}_B^2 \underline{R}_L = \frac{\underline{S}_B^2 \underline{R}_L}{\underline{U}_B^2} = \frac{(\underline{P}_B^2 + \underline{Q}_B^2) \underline{R}_L}{\underline{U}_B^2} \quad (2.10)$$

Gdyby w linii należało uwzględnić elementy poprzeczne to straty mocy w elementach poprzecznych można wyliczyć z zależności:

$$\Delta \underline{S}_Y = \sqrt{3} \underline{U}_B \underline{I}_Y^* = \underline{U}_B^2 \underline{Y}_L^* \quad (2.11)$$

gdym:

$$\underline{I}_Y = \frac{\underline{U}_B}{\sqrt{3}} \underline{Y}_L \quad (2.12)$$

Powyższe straty mocy można wyrazić jako:

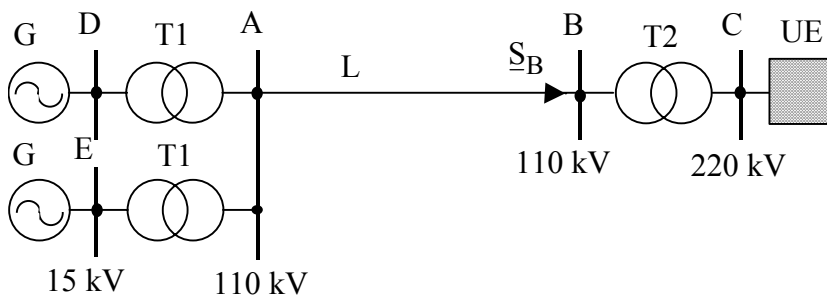
$$\Delta P_Y = U_B^2 G_L \quad (2.13)$$

$$\Delta Q_Y = -U_B^2 B_L \quad (2.14)$$

Gdy elementem poprzecznym jest pojemność linii to $B_L > 0$ a $\Delta Q_Y < 0$ co zgadza się ze znakiem dla mocy biernej pojemnościowej.

2.1.4. Zadanie 1

Dany jest schemat sieci elektroenergetycznej jak na rys. 2.2.



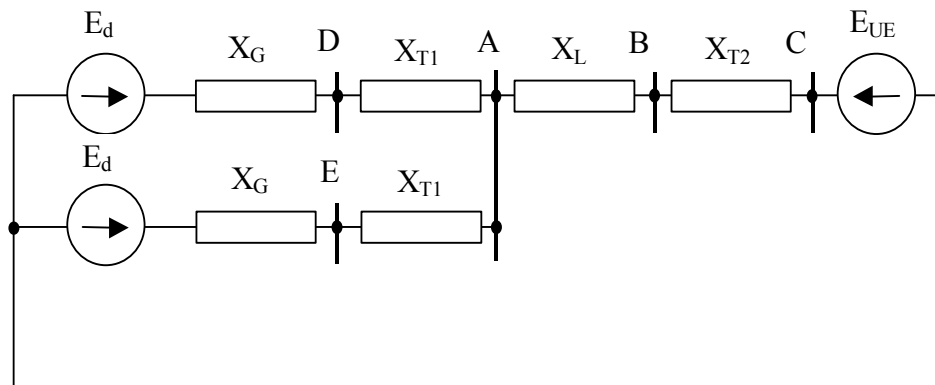
Rys. 2.2 Schemat sieci

Dane elementów sieci:

G:	$S_N=150 \text{ MVA}$	$U_{NG}=15,75$	$X_d=180\%$
T1:	$S_N=150 \text{ MVA}$	$121\text{kV}/15,75\text{kV}$	$\Delta U_z=11\%$
L:	$X_K=0,4 \Omega/\text{km}$	$l=40\text{km}$	
T2:	$S_N=500 \text{ MVA}$	$220\text{kV}/110\text{kV}$	$\Delta U_z=9\%$
UE:	$S_Z=\infty$		

Zakładając, że $U_B = 110 \text{ kV}$ a $S_B = (200 + j0) \text{ MVA}$ obliczyć rozptył mocy napięcia w węzłach i narysować wykres wskazowy.

1) Schemat zastępczy:



Rys. 2.3 Schemat zastępczy sieci

2) Obliczanie impedancji odbędzie się na poziomie 110 kV:

$$X_g = \frac{X_{d\%}}{100} \frac{U_{Ng}^2}{S_{Ng}} v_{T1}^2 = \frac{180}{100} \frac{15,75^2}{150} \left(\frac{121}{15,75} \right)^2 = 176 \Omega$$

$$X_{T1} = \frac{11}{100} \frac{121^2}{150} = 10,7 \Omega$$

$$X_L = 0,4 * 40 = 16 \Omega$$

$$X_{T2} = \frac{9}{100} \frac{110^2}{500} = 2,18 \Omega$$

3) Napięcie \underline{U}_A

$$\underline{U}_A = \underline{U}_B + \sqrt{3} \Delta \underline{U}_{AB}$$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{U}_{AB} &= \frac{P_B R_{AB} + Q_B X_{AB}}{\underline{U}_B^*} + j \frac{P_B X_{AB} - Q_B R_{AB}}{\underline{U}_B^*} = \\ &= \frac{200 \cdot 0 + 0 \cdot 160}{110} + j \frac{200 \cdot 16 - 0 \cdot 0}{110} = j29,1 \text{ kV} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_A = 110 + j29,1 = 113,8 e^{j14,8^\circ} \text{ kV}$$

przy czym:

$$U_A = \sqrt{110^2 + 29,1^2} = 113,8 \text{ kV}$$

$$\varphi_{U_A} = \arctg \frac{29,1}{110} = 14,8^\circ$$

4) Straty mocy w linii:

$$\Delta P = \frac{P_B^2 + Q_B^2}{U_B^2} R_L = 0$$

$$\Delta Q = \frac{P_B^2 + Q_B^2}{U_B^2} X_L = \frac{200^2}{110^2} 16 = 52,9 \text{ MVA}$$

$$\underline{S}_A = \underline{S}_B + \Delta \underline{S} = (200 + j52,9) \text{ MVA}$$

5) Napięcie na zaciskach generatora:

W celu uproszczenia obliczeń zakładamy, że napięcie na szynach A znajduje się w osi odniesienia tzn. $\underline{U}_A = U_A$. Moc w transformatorze T1 wynosi:

$$\underline{S}_{T1} = \frac{1}{2} \underline{S}_A = \frac{1}{2} (200 + j52.9) = (100 + j26.45) \text{ MVA}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}'_G &= U_A + \frac{P_{T1}R_{T1} + Q_{T1}X_{T1}}{U_A} + j \frac{P_{T1}X_{T1} - Q_{T1}R_{T1}}{U_A} = \\ &= 113.8 + \left(\frac{26.45 \cdot 10.7}{113.8} + j \frac{100 \cdot 10.7}{113.8} \right) = (113.8 + 2.49 + j9.40) = \\ &= 116.3 + j9.40 = 116.7 e^{j4.62^\circ} \text{ kV} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_G = 116.7 e^{j4.62^\circ} e^{j14.8^\circ} = 116.7 e^{j19.4^\circ}$$

6) Straty mocy w transformatorze T1

$$\Delta Q_{T1} = \frac{P_{T1}^2 + Q_{T1}^2}{U_A^2} X_{T1} = \frac{100^2 + 26.45^2}{113.8^2} 10.7 = 8.84 \text{ M var}$$

$$\underline{S}_G = \underline{S}_{T1} + \Delta \underline{S}_{T1} = (100 + j35.3) \text{ MVA}$$

7) Siła elektromotoryczna generatora

$$\begin{aligned} \underline{E}_d &= \underline{U}_G + \frac{P_G R_G + Q_G X_G}{\underline{U}_G^*} + j \frac{P_G X_G - Q_G R_G}{\underline{U}_G^*} = \\ &= 116.7 + \left(\frac{35.3 \cdot 176}{116.7} + j \frac{100 \cdot 176}{116.7} \right) = 116.7 + 53.2 + j151 = \\ &= (170 + j151) \text{ kV} = 227 e^{j41.6^\circ} \text{ kV} \\ \underline{E}_d &= 227 e^{j41.6^\circ} e^{j19.4^\circ} = 227 e^{j61.0^\circ} \text{ kV} = (110 + j199) \text{ kV} \end{aligned}$$

Po przeliczeniu mamy:

$$\underline{E}_d = 227 e^{j61.0^\circ} \frac{15.75}{121} = 29.5 e^{j61.0^\circ} \text{ kV}$$

$$\underline{E}_d = \frac{29.5 e^{j61.0^\circ}}{15.75} = 1.87 e^{j61.0^\circ} \text{ jw}$$

8) Napięcie sieci sztywnej

$$\underline{U}_C = \underline{U}_B + \frac{P_B R_{T2} + Q_B X_{T2}}{\underline{U}_B^*} + j \frac{P_B X_{T2} - Q_B R_{T2}}{\underline{U}_B^*} =$$

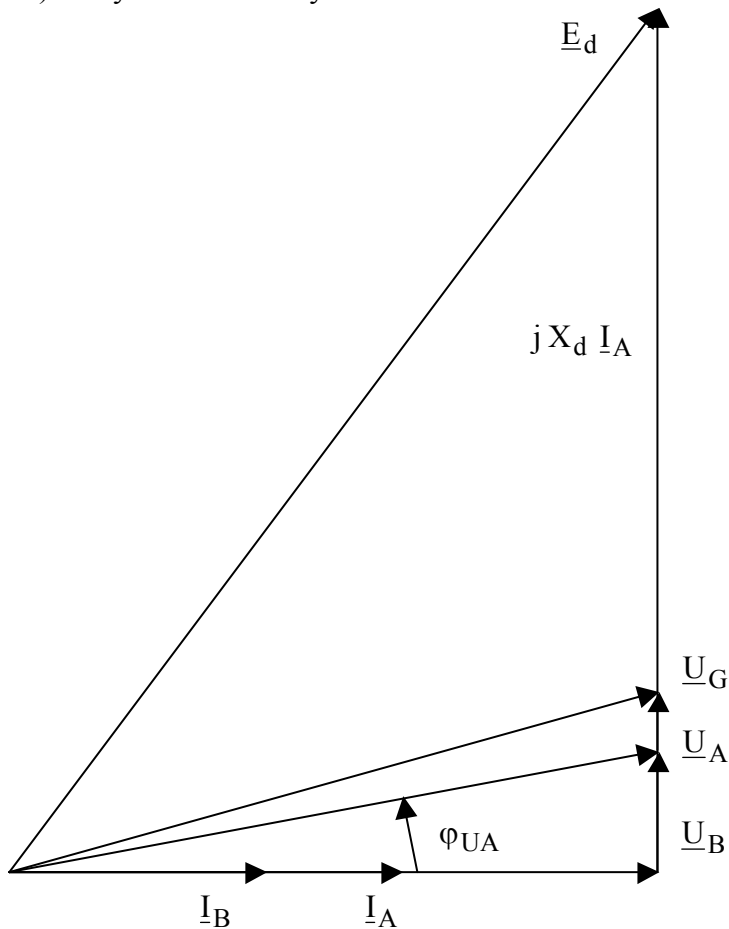
$$= \underline{U}_B - j \frac{P_B X_{T2}}{\underline{U}_B^*} = 110 - j \frac{200 \cdot 2.18}{110} = (110 - j3.96) \text{ kV}$$

$$\underline{U}_C = 110 - j3.96 = 110.0 e^{-j2.06^\circ} \text{ kV}$$

9) Kąt δ

$$\delta = \delta_G - \delta_C = 61 + 2.06 = 63.1^\circ$$

10) Wykres wskazowy



Rys. 2.4 Wykres wskazowy

2.1.5. Zadanie 2

Dany jest schemat sieci elektroenergetycznej jak na rys. 2.2.

Dane elementów takie same jak w zadaniu 1 przy czym w linii należy dodatkowo uwzględnić:

L: $R_k = 0.06 \Omega/\text{km};$

$B_k = 2.76 \mu\text{S}/\text{km};$

Zakładając, że generatory są obciążone mocą $S_G = 150 \text{ MVA}$ przy $U_G = U_{NG} = 15.75 \text{ kV}$ oraz że w sieci tej są następujące odbiory:

a) Szyny D i E: $P_D = P_E = 10 \text{ MW}; \cos\varphi = 0.8 \text{ ind.},$

b) Szyna A: $\underline{S}_A = (200 + j100) \text{ MVA};$ przy $U_A = U_{NA}$ i poniższych zależnościach od napięcia:

$$P_A = P_{AUN} \left(\frac{U_A}{U_{NA}} \right)^{1.5}$$

$$Q_A = Q_{AUN} \left(\frac{U_A}{U_{NA}} \right)^2$$

c) Szyna B: $\underline{S}_B = (400 + j100) \text{ MVA}$;

obliczyć rozptyw mocy, napięcia w węzłach i narysować wykres wskazowy.

1) Obliczanie impedancji:

$$R_L = R_k \cdot l = 0.06 \cdot 40 = 2.4 \Omega$$

$$B_L = B_k \cdot l = 2.76 \cdot 40 = 110.4 \mu\text{S}$$

2) Moce generatora

$$P_G = S_G \cdot \cos \varphi_G = 150 \cdot 0.85 = 127.5 \text{ MW}$$

$$Q_G = S_G \cdot \sin \varphi_G = 150 \cdot \sqrt{1 - 0.85^2} = 79.0 \text{ M var}$$

3) Siła elektromotoryczna generatora

Obliczenia będą wykonywane na poziomie 110 kV, w tym celu napięcie na zaciskach generatora trzeba przeliczyć na ten poziom napięcia:

$$U'_G = U_G \cdot v_{T1} = 15.75 \left(\frac{121}{15.75} \right) = 121 \text{ kV}$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_d &= U'_G + \frac{Q_G \cdot X_d}{U'_G} + j \frac{P_G \cdot X_d}{U'_G} = \\ &= 121 + \frac{79.0 \cdot 176}{121} + j \frac{127.5 \cdot 176}{121} = 121 + 115 + j185 = \\ &= (236 + j185) \text{ kV} = 300 e^{j38.1^\circ} \text{ kV} \end{aligned}$$

Po przeliczeniu jest:

$$\underline{E}_d = 300 \frac{15.75}{121} e^{j38.1^\circ} = 39.0 e^{j38.1^\circ} \text{ kV}$$

$$\underline{E}_d = \frac{39.0}{15.75} e^{j38.1^\circ} = 2.48 e^{j38.1^\circ} \text{ jw}$$

4) Moce w węzle D

$$Q_D = \frac{P_D}{\cos \varphi_D} \sin \varphi_D = \frac{10}{0.8} \sqrt{1 - 0.8^2} = 7.5 \text{ M var}$$

5) Moc w transformatorze T1

$$P_{T1} = P_G - P_D = 127.5 - 10 = 117.5 \text{ MW}$$

$$Q_{T1} = Q_G - Q_D = 79 - 7.5 = 71.5 \text{ MW}$$

6) Napięcie \underline{U}_A

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= U_G - \frac{P_{T1}R_{T1} + Q_{T1}X_{T1}}{U_G} - j \frac{P_{T1}X_{T1} - Q_{T1}R_{T1}}{U_G} = \\ &= 121 - \frac{117.5 \cdot 0 + 71.5 \cdot 10.7}{121} - j \frac{117.5 \cdot 10.7 - 71.5 \cdot 0}{121} = \\ &= 121 - 6.32 - j10.4 = (114.7 - j10.4) \text{ kV} = 115.2 e^{-j5.18^\circ} \text{ kV} \end{aligned}$$

7) Straty mocy w transformatorze T1

$$\Delta P_{T1} = \frac{P_{T1}^2 + Q_{T1}^2}{U_G^2} R_{T1} = 0$$

$$\Delta Q_{T1} = \frac{P_{T1}^2 + Q_{T1}^2}{U_{T1}^2} X_{T1} = \frac{117.5^2 + 71.5^2}{121^2} 10.7 = 13.8 \text{ M var}$$

$$\underline{S}_{T1A} = \underline{S}_{T1} - \Delta \underline{S}_{T1} = (117.5 + j71.5) - j13.8 = (117.5 + j57.7) \text{ MVA}$$

8) Moc odbierana z węzła A

$$P_A = P_{AUN} \left(\frac{U_A}{U_{NA}} \right)^{1.5} = 200 \left(\frac{115.2}{110} \right)^{1.5} = 214 \text{ MW}$$

$$Q_A = Q_{AUN} \left(\frac{U_A}{U_{NA}} \right)^2 = 100 \left(\frac{115.2}{110} \right)^2 = 110 \text{ M var}$$

9) Moc wpływająca do linii

$$P_{LA} = 2 \cdot P_{T1A} - P_A = 2 \cdot 117.5 - 214 = 21 \text{ MW}$$

$$Q_{LA} = 2 \cdot Q_{T1A} - Q_A = 2 \cdot 57.7 - 110 = 5.4 \text{ M var}$$

10) Poprzeczne straty mocy w linii

$$\Delta Q_{YA} = -U_A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot B_L = -115.2^2 \frac{1}{2} 110.4 = -0.733 \text{ M var}$$

11) Moc w linii

$$P_L = P_{LA} = 21 \text{ MW}$$

$$Q_L = Q_{LA} - \Delta Q_{YA} = 5.4 - (-0.733) = 6.13 \text{ M var}$$

12) Napięcie na szynach B

$$\begin{aligned} \underline{U}'_B &= U_A - \frac{P_L R_L + Q_L X_L}{U_A} - j \frac{P_L X_L - Q_L R_L}{U_A} = \\ &= 115.2 - \left(\frac{21 \cdot 2.4 + 6.13 \cdot 16}{115.2} + j \frac{21 \cdot 16 - 6.13 \cdot 2.4}{115.2} \right) = \\ &= 115.2 - 0.44 - 0.85 - j 2.92 - j 0.13 = (113.9 - j 3.05) \text{ kV} = \\ &= 114 e^{-j 1.53^\circ} \text{ kV} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_B = 114 e^{-j 1.53^\circ} e^{-j 5.18^\circ} = 114 e^{-j 6.71^\circ} \text{ kV}$$

13) Podłużne straty mocy w linii

$$\Delta P_L = \frac{P_L^2 + Q_L^2}{U_A^2} R_L = \frac{21^2 + 6.13^2}{115.2^2} 2.4 = 0.0865 \text{ MW}$$

$$\Delta Q_L = \frac{P_L^2 + Q_L^2}{U_A^2} X_L = \frac{21^2 + 6.13^2}{115.2^2} 16 = 0.577 \text{ M var}$$

14) Poprzeczne straty mocy w linii

$$\Delta Q_{YB} = -U_B^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot B_L = -114^2 \frac{1}{2} 110.4 = -0.717 \text{ M var}$$

15) Moc wypływająca z linii

$$P_{LB} = P_L - \Delta P_L = 21 - 0.0865 = 20.9 \text{ MW}$$

$$Q_{LB} = Q_L - \Delta Q_L - \Delta Q_{YA} = 6.13 - 0.577 - (-0.717) = 6.27 \text{ M var}$$

16) Moc dopływająca z transformatora T2 do szyn B

$$P_{T2B} = P_B - P_{LB} = 400 - 20.9 = 381 \text{ MW}$$

$$Q_{T2B} = Q_B - Q_{LB} = 100 - 6.27 = 93.7 \text{ MW}$$

17) Straty mocy w transformatorze T1

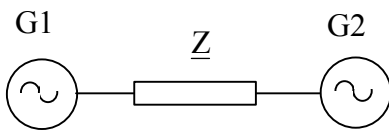
$$\Delta Q_{T2} = \frac{P_{T2B}^2 + Q_{T2B}^2}{U_B^2} X_{T2} = \frac{381^2 + 93.7^2}{114^2} 2.18 = 25.8 \text{ M var}$$

18) Napięcie sieci sztywnej

$$\begin{aligned} \underline{U}'_C &= U_B + \frac{Q_{T2B} X_{T2B}}{U_B} + j \frac{P_{T2B} X_{T2B}}{U_B} = \\ &= 114 + \left(\frac{93.7 \cdot 2.18}{114} + j \frac{381 \cdot 2.18}{114} \right) = 114 + 1.79 + j7.29 = \\ &= 116 + j7.29 = 116 e^{j3.60^\circ} \text{ kV} \end{aligned}$$

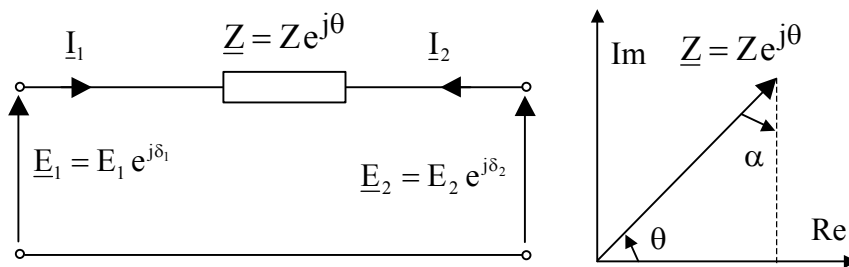
2.2. Układ dwumaszynowy

Rozważmy prosty układ dwóch maszyn synchronicznych połączonych z sobą przez impedancję podłużną



Rys. 2.5 Schemat sieci

Pierwsza maszyna może być generatorem druga silnikiem synchronicznym lub odwrotnie. Rozważmy układ symetryczny. Wtedy rozważanie możemy prowadzić w układzie jednofazowym jak na rysunku.



Rys. 2.6 Schemat zastępczy sieci

W stanie ustalonym zakładamy, że $\omega_1 = \omega_2$.

Prąd I_1 z prawa Ohma

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{Z} = \frac{E_1}{Z} - \frac{E_2}{Z} = \frac{E_1}{Z} e^{j(\delta_1 - \theta)} - \frac{E_2}{Z} e^{j(\delta_2 - \theta)} \quad (2.15)$$

Moc pierwszego generatora:

$$\underline{S}_1 = \sqrt{3} \underline{E}_1 \underline{I}_1^* = \frac{E_1^2}{Z} e^{j\theta} - \frac{E_1 E_2}{Z} e^{j(\delta_1 - \delta_2 + \theta)} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{E_1^2}{Z} \cos \theta - \frac{E_1 E_2}{Z} \cos(\delta_1 - \delta_2 + \theta) = \\ &= \frac{E_1^2}{Z} \cos \theta - \frac{E_1 E_2}{Z} \cos(\delta_{12} + \theta) = \\ &= \frac{E_1^2}{Z} \sin \alpha + \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta_{12} - \alpha) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{E_1^2}{Z} \sin \theta - \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta_1 - \delta_2 + \theta) = \\ &= \frac{E_1^2}{Z} \sin \theta - \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta_{12} + \theta) = \\ &= \frac{E_1^2}{Z} \cos \alpha - \frac{E_1 E_2}{Z} \cos(\delta_{12} - \alpha) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Moc drugiego generatora:

$$\underline{S}_2 = \sqrt{3} \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = \frac{E_2^2}{Z} e^{j\theta} - \frac{E_1 E_2}{Z} e^{j(\delta_2 - \delta_1 + \theta)} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{E_2^2}{Z} \cos \theta - \frac{E_1 E_2}{Z} \cos(\delta_2 - \delta_1 + \theta) = \\ &= \frac{E_2^2}{Z} \cos \theta - \frac{E_1 E_2}{Z} \cos(\delta_{21} + \theta) = \\ &= \frac{E_2^2}{Z} \sin \alpha + \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta_{21} - \alpha) = \frac{E_2^2}{Z} \sin \alpha - \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta_{12} + \alpha) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{E_2^2}{Z} \sin \theta - \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta_2 - \delta_1 + \theta) = \\ &= \frac{E_2^2}{Z} \sin \theta - \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta_{21} + \theta) = \\ &= \frac{E_2^2}{Z} \cos \alpha - \frac{E_1 E_2}{Z} \cos(\delta_{12} + \alpha) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\Delta P = P_1 + P_2 = 3 I^2 R \quad (2.22)$$

Na rys 2.8 i rys. 2.10 przedstawiono zależności mocy czynnej od kąta δ zgodnie z równaniami (2.17) i (2.20). Na rys 2.9 i rys. 2.11 przedstawiono zależności mocy biernej od kąta δ . Krzywe te wykreślono przy założeniu, że siła elektromotoryczna pierwszego generatora jest większa niż

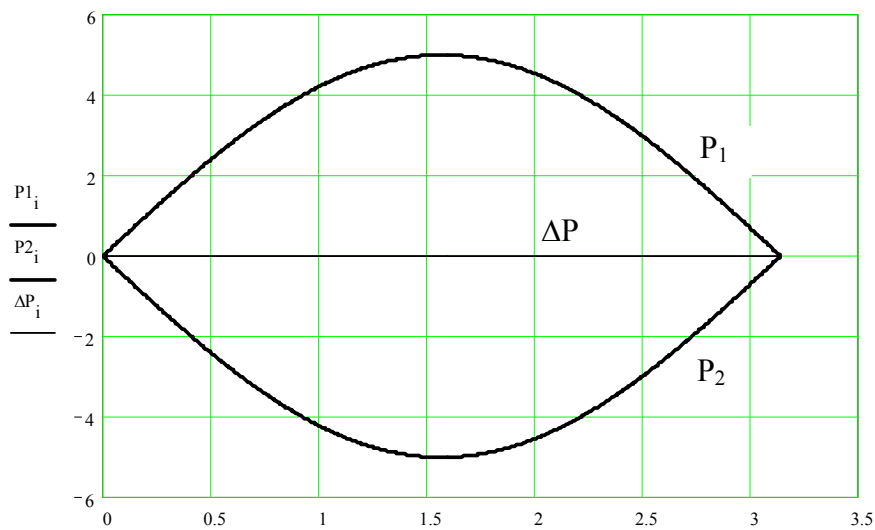
drugiego. Krzywe z rys. 2.8 i z rys. 2.9 wykreślono przy pominięciu rezystancji obwodu, czyli dla $\alpha=0$ Sieć można wtedy opisać równaniami:

$$P_1 = \frac{E_1 E_2}{X} \sin \delta_{12} \quad (2.23)$$

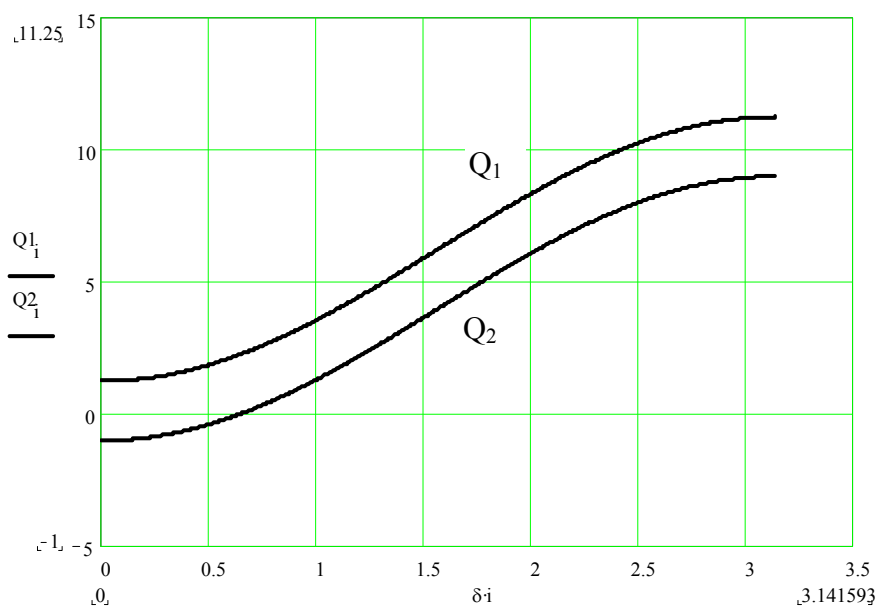
$$Q_1 = \frac{E_1^2}{X} - \frac{E_1 E_2}{X} \cos \delta_{12} \quad (2.24)$$

$$P_2 = -\frac{E_1 E_2}{X} \sin \delta_{12} \quad (2.25)$$

$$Q_2 = \frac{E_2^2}{X} - \frac{E_1 E_2}{X} \cos \delta_{12} \quad (2.26)$$



Rys. 2.7 Charakterystyka P_1 oraz P_2 w funkcji kąta δ_{12} dla $\alpha=0$.



Rys. 2.8 Charakterystyka Q_1 oraz Q_2 w funkcji kąta δ_{12} dla $\alpha=0$ rad.

Krzywa dla mocy czynnej posiada swoje maksimum dla $\delta_{12}=90$ stopni. Moc tą nazywamy mocą graniczną przesyłu i wyraża się ona zależnościami:

$$P_{1gr} = \frac{E_1 E_2}{X} \quad (2.27)$$

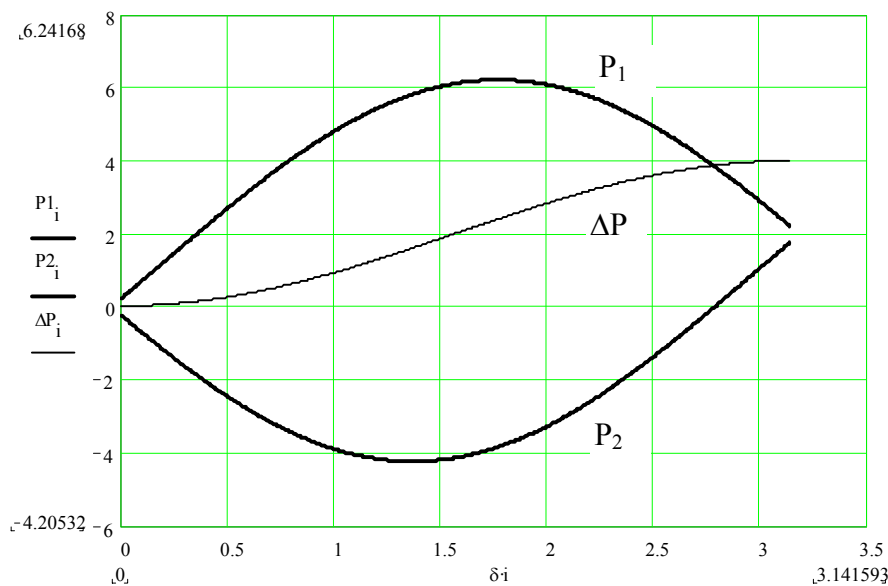
$$P_{2gr} = -\frac{E_1 E_2}{X} \quad (2.28)$$

Z wzorów od (2.23) do (2.26) jasno wynika, że przy małych wartościach kąta δ_{12} (mniej niż 30°) moc czynna zależy przede wszystkim od tego kąta a moc bierna on napięcie.

W przypadku ogólnym moce graniczne opisane są wzorami:

$$P_{1gr} = \frac{E_1^2}{Z} \sin \alpha + \frac{E_1 E_2}{Z} \quad (2.29)$$

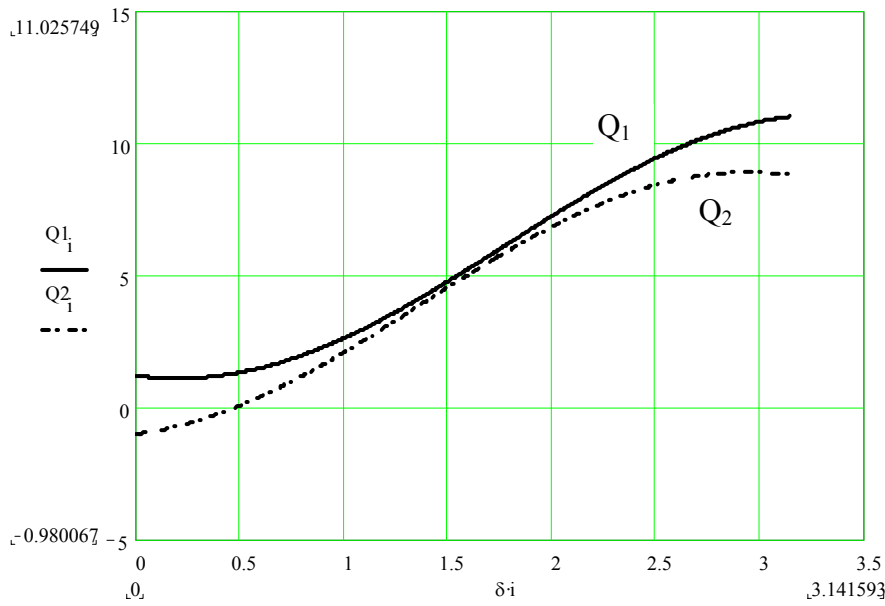
$$P_{2gr} = \frac{E_2^2}{Z} \sin \alpha - \frac{E_1 E_2}{Z} \quad (2.30)$$



Rys. 2.9 Charakterystyka P_1 oraz P_2 w funkcji kąta δ_{12} dla $\alpha=0.2$ rad.

Moce graniczne to największe moce jakie można przesłać pomiędzy dwoma punktami sieci elektroenergetycznej zdefiniowanych napięciami oraz impedancją pomiędzy nimi.

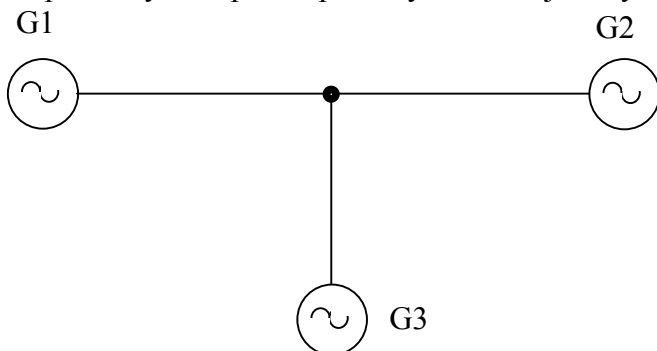
Charakterystyki ukazane na rys. 2.7, rys. 2.8, rys. 2.9 oraz rys.2.10 można uzyskiwać stosując program o nazwie char_moc. Program ten dodatkowo umożliwi obserwację wpływu gałęzi poprzecznej, odbiorczej na w.w charakterystyki mocy.



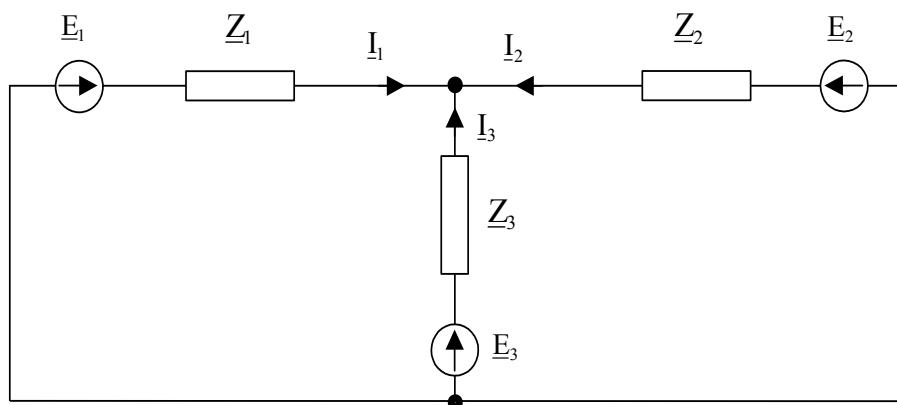
Rys. 2.10 Charakterystyka Q_1 oraz Q_2 w funkcji kąta δ_{12} dla $\alpha=0.2$ rad.

2.3. Przepływy mocy w układzie wielomaszynowym

W pierwszym etapie rozpatrzmy układ trójmaszynowy.

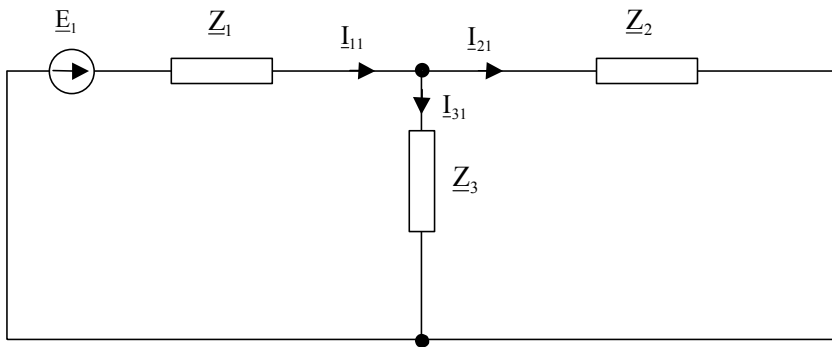


Rys. 2.11 Schemat sieci trójmaszynowej



Rys. 2.12 Schemat zastępczy sieci trójmaszynowej

Aby wyznaczyć przepływy mocy musimy znać prądy I_1 , I_2 , I_3 . Prądy wyznaczamy stosując metodę superpozycji. W pierwszym etapie pomijamy siły elektromotoryczne źródła 2-go i 3-go i schemat zastępczy jest postaci jak na rys. 2.14.



Rys. 2.13 Schemat zastępczy sieci trójmaszynowej dla metody superpozycji przy założeniu, że pomijamy siły elektromotoryczne źródła 2-go i 3-go.

Prąd płynący w źródle 1-szym wynosi:

$$I_{11} = \frac{E_1}{Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{E_1}{Z_{11}} \quad (2.31)$$

a impedancję Z_{11} to:

$$Z_{11} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (2.32)$$

Prąd płynący w źródle 2-im wynosi:

$$\begin{aligned} I_{21} &= I_{11} \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{E_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3} \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \\ &= \frac{E_1}{Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}} = \frac{E_1}{Z_{21}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

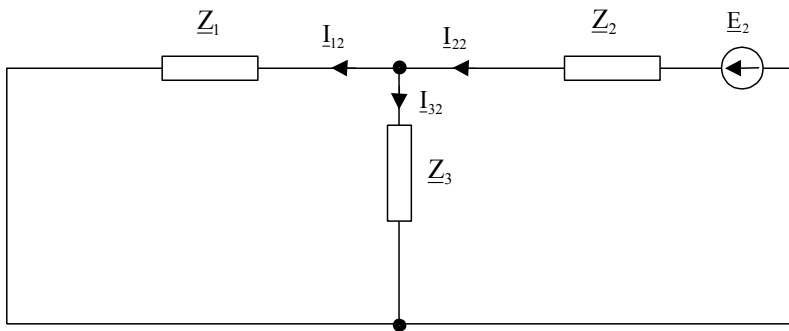
$$Z_{21} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \quad (2.34)$$

Prąd płynący w źródle 3-im wynosi:

$$I_{31} = I_{11} \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{E_1}{Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}} = \frac{E_1}{Z_{31}} \quad (2.35)$$

$$Z_{31} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \quad (2.36)$$

W drugim etapie stosowania metody superpozycji pomijamy siły elektromotoryczne źródła 1-go i 3-go i schemat zastępczy jest postaci jak na rys. 2.14.



Rys. 2.14 Schemat zastępczy sieci trójmaszynowej dla metody superpozycji przy założeniu, że pomijamy siły elektromotoryczne źródła 1-go i 3-go.

Pomijając siły elektromotoryczne źródła 1-go i 3-go prąd płynący w źródle 2-im wynosi:

$$I_{22} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_{22}} \quad (2.37)$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \quad (2.38)$$

W tym etapie prąd płynący w źródle 1-szym wynosi:

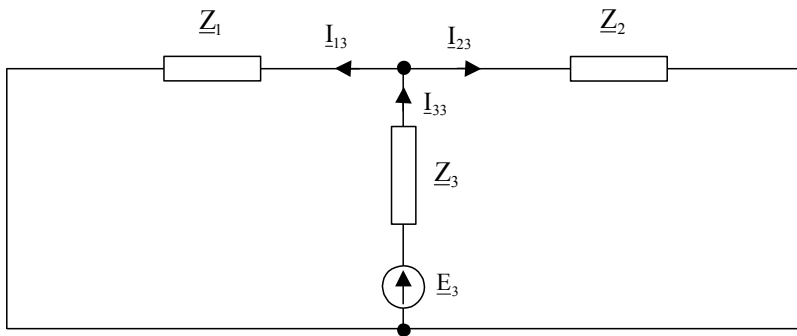
$$\begin{aligned} I_{12} &= I_{22} \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_2 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3} \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \\ &= \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_{12}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \quad (2.40)$$

a prąd w 3-im źródle jest postaci:

$$I_{32} = I_{22} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_{32}} \quad (2.41)$$

$$\underline{Z}_{32} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} \quad (2.42)$$



Rys. 2.15 Schemat zastępczy sieci trójmaszynowej dla metody superpozycji przy założeniu, że pomijamy siły elektromotoryczne źródła 1-go i 2-go.

Pomijając siły elektromotoryczne źródła 1-go i 2-go prąd płynący w źródle 3-im wynosi:

$$I_{33} = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}} = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_{33}} \quad (2.43)$$

$$\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (2.44)$$

Prąd w gałęzi 2-iej:

$$\begin{aligned} I_{13} &= I_{33} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \\ &= \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_{13}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \quad (2.46)$$

Prąd w gałęzi 1-iej:

$$I_{23} = I_{33} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}} = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_{23}} \quad (2.47)$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} \quad (2.48)$$

Prądy w gałęziach (źródłach) wynoszą:

$$I_1 = I_{11} - I_{12} - I_{13} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_{11}} - \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_{12}} - \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_{13}} \quad (2.49)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{22} - \underline{I}_{21} - \underline{I}_{23} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_{22}} - \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_{21}} - \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_{23}} \quad (2.50)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{33} - \underline{I}_{31} - \underline{I}_{32} = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_{33}} - \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_{31}} - \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_{32}} \quad (2.51)$$

Powyższe trzy równania można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_{11}} & -\frac{1}{\underline{Z}_{12}} & -\frac{1}{\underline{Z}_{13}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_{21}} & \frac{1}{\underline{Z}_{22}} & -\frac{1}{\underline{Z}_{23}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_{31}} & -\frac{1}{\underline{Z}_{32}} & \frac{1}{\underline{Z}_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \underline{E}_3 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

lub

$$\underline{I} = \underline{Y}_R \underline{E} \quad (2.53)$$

Macierz \underline{Y}_R nazywana jest macierzą transferową sieci elektroenergetycznej.

Moce płynące w poszczególnych źródłach można wyrazić zależnościami:

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underline{E}_1 \underline{I}_1^* = \underline{E}_1 \left(\frac{\underline{E}_1^*}{\underline{Z}_{11}} - \frac{\underline{E}_2^*}{\underline{Z}_{12}} - \frac{\underline{E}_3^*}{\underline{Z}_{13}} \right) = \\ &= \frac{E_1^2}{Z_{11}} e^{j\theta_{11}} - \frac{E_1 E_2}{Z_{12}} e^{j(\delta_1 - \delta_2 + \theta_{12})} - \frac{E_1 E_3}{Z_{13}} e^{j(\delta_1 - \delta_3 + \theta_{13})} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$P_1 = \frac{E_1^2}{Z_{11}} \cos \theta_{11} - \frac{E_1 E_2}{Z_{12}} \cos(\delta_1 - \delta_2 + \theta_{12}) - \frac{E_1 E_3}{Z_{13}} \cos(\delta_1 - \delta_3 + \theta_{13}) \quad (2.55)$$

$$\theta = 90 - \alpha \quad (2.56)$$

lub:

$$P_1 = \frac{E_1^2}{Z_{11}} \sin \alpha_{11} + \frac{E_1 E_2}{Z_{12}} \sin(\delta_{12} - \alpha_{12}) + \frac{E_1 E_3}{Z_{13}} \sin(\delta_{13} - \alpha_{13}) \quad (2.57)$$

$$P_2 = \frac{E_2 E_1}{Z_{21}} \sin(\delta_{21} - \alpha_{21}) + \frac{E_2^2}{Z_{22}} \sin \alpha_{22} + \frac{E_2 E_3}{Z_{23}} \sin(\delta_{23} - \alpha_{23}) \quad (2.58)$$

$$P_3 = \frac{E_3 E_1}{Z_{31}} \sin(\delta_{31} - \alpha_{31}) + \frac{E_3 E_2}{Z_{32}} \sin(\delta_{32} - \alpha_{32}) + \frac{E_3^2}{Z_{33}} \sin \alpha_{33} \quad (2.59)$$

Uogólniając otrzymujemy:

$$P_i = \frac{E_i^2}{Z_{ii}} \sin \alpha_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{E_i E_j}{Z_{ij}} \sin(\delta_i - \delta_j - \alpha_{ij}) \quad (2.60)$$

dla $i=1..n$

Moce bierne:

$$Q_1 = \frac{E_1^2}{Z_{11}} \cos \alpha_{11} - \frac{E_1 E_2}{Z_{12}} \cos(\delta_{12} - \alpha_{12}) - \frac{E_1 E_3}{Z_{13}} \cos(\delta_{13} - \alpha_{13}) \quad (2.61)$$

$$Q_2 = -\frac{E_2 E_1}{Z_{21}} \cos(\delta_{21} - \alpha_{21}) + \frac{E_2^2}{Z_{22}} \cos \alpha_{22} - \frac{E_2 E_3}{Z_{23}} \cos(\delta_{23} - \alpha_{23}) \quad (2.62)$$

$$Q_3 = -\frac{E_3 E_1}{Z_{31}} \cos(\delta_{31} - \alpha_{31}) - \frac{E_3 E_2}{Z_{32}} \cos(\delta_{32} - \alpha_{32}) + \frac{E_3^2}{Z_{33}} \sin \alpha_{33} \quad (2.63)$$

Uogólnienie:

$$Q_i = \frac{E_i^2}{Z_{ii}} \cos \alpha_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{E_i E_j}{Z_{ij}} \cos(\delta_i - \delta_j - \alpha_{ij}) \quad (2.64)$$

dla $i=1..n$

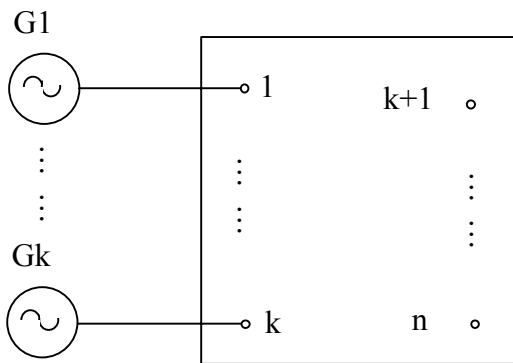
2.4. Obliczanie macierzy admitancji własnych i wzajemnych

Istnieje kilka metod obliczanie macierzy admitancji własnych i wzajemnych, a mianowicie:

- metoda przekształcania schematu zastępczego sieci do gwiazdy wieloramiennej,
- metoda prądów jednostkowych czyli metoda superpozycji (została omówiona w poprzednim podrozdziale),
- metoda eliminująca węzły odbiorcze zwana też metodą redukcji modelu sieci.

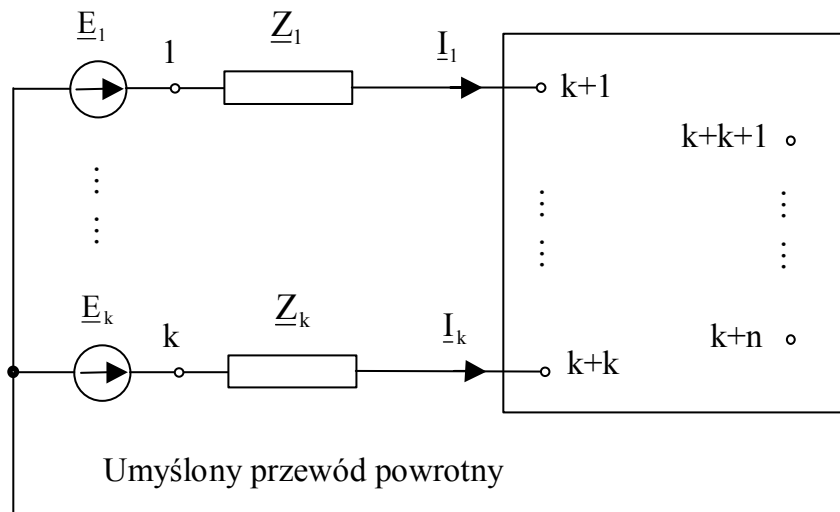
2.4.1. Metoda redukcji modelu sieci

Rozważmy n-węzłowy system elektroenergetyczny.



Rys. 2.16 Schemat sieci wielomaszynowej.

Schemat zastępczy będzie postaci jak na rys. 2.17:



Rys. 2.17 Schemat zastępczy sieci wielomaszynowej.

Dla węzła odniesienia umieszczonego w umyślonym przewodzie powrotnym równania potencjałów węzłowych są postaci:

$$\mathbf{I} = \mathbf{YU} \tag{2.65}$$

Wszystkie węzły rozpatrywanego systemu podzielimy na dwie grupy. Do zbioru {R} zaliczymy węzły od 1 do k-tego czyli węzły na zaciskach sił elektromotorycznych generatorów a do zbioru {E} zaliczymy pozostałe węzły. W wyniki mamy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_R \\ \mathbf{I}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{RR} & \mathbf{Y}_{RE} \\ \mathbf{Y}_{ER} & \mathbf{Y}_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_E \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

gdzie:

$$\mathbf{U}_R = [\mathbf{E}_1 \quad \dots \quad \mathbf{E}_k]^T = \mathbf{E} \tag{2.67}$$

$$\mathbf{I}_E = 0 \tag{2.68}$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$\underline{I}_R = \underline{Y}_{RR} \underline{E} + \underline{Y}_{RE} \underline{U}_E \quad (2.69)$$

$$\underline{0} = \underline{Y}_{ER} \underline{E} + \underline{Y}_{EE} \underline{U}_E \quad (2.70)$$

stąd z drugiego równania:

$$\underline{U}_E = -\underline{Y}_{EE}^{-1} \underline{Y}_{ER} \underline{E} \quad (2.71)$$

a po podstawieniu do równania pierwszego mamy:

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \underline{Y}_{RR} \underline{E} + \underline{Y}_{RE} \underline{U}_E = \underline{Y}_{RR} \underline{E} + \underline{Y}_{RE} \left(-\underline{Y}_{EE}^{-1} \underline{Y}_{ER} \underline{E} \right) = \\ &= \left(\underline{Y}_{RR} - \underline{Y}_{RE} \underline{Y}_{EE}^{-1} \underline{Y}_{ER} \right) \underline{E} \end{aligned} \quad (2.72)$$

lub w innej postaci:

$$\underline{I}_R = \underline{Y}_R \underline{E} \quad (2.73)$$

gdzie:

$$\underline{Y}_R = \underline{Y}_{RR} - \underline{Y}_{RE} \underline{Y}_{EE}^{-1} \underline{Y}_{ER} \quad (2.74)$$

$$\underline{Y}_D = -\underline{Y}_{EE}^{-1} \underline{Y}_{ER} \quad (2.75)$$

Macierz \underline{Y}_R to znana już macierz transferowa sieci elektroenergetycznej. Macierz \underline{Y}_D to macierz dystrybucji napięć w sieci elektroenergetycznej.

Przeanalizujemy teraz poszczególne podmacierze. Analizując węzły należące do zbioru $\{R\}$, które określają podmacierz \underline{Y}_{RR} , widzimy, że do tych węzłów są dołączone jedynie gałęzie łączące je z węzłami zbioru $\{E\}$ brak jest natomiast gałęzi łączących węzły zbioru $\{R\}$ pomiędzy sobą. W takiej sytuacji podmacierz \underline{Y}_{RR} jest podmacierzą diagonalną o postaci:

$$\underline{Y}_{RR} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{Z_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{1}{Z_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{Z_k} \\ 1 & & & & k \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Podmacierz \underline{Y}_{RE} jest definiowana jedynie przez gałęzie łączące węzły należące do zbioru $\{R\}$ z węzłami zbioru $\{E\}$, czyli:

$$\underline{Y}_{RE} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & -\frac{1}{\underline{Z}_2} & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ k & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{\underline{Z}_k} & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ & k+1 & & & k+k & 2k+1 & n+k & & \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

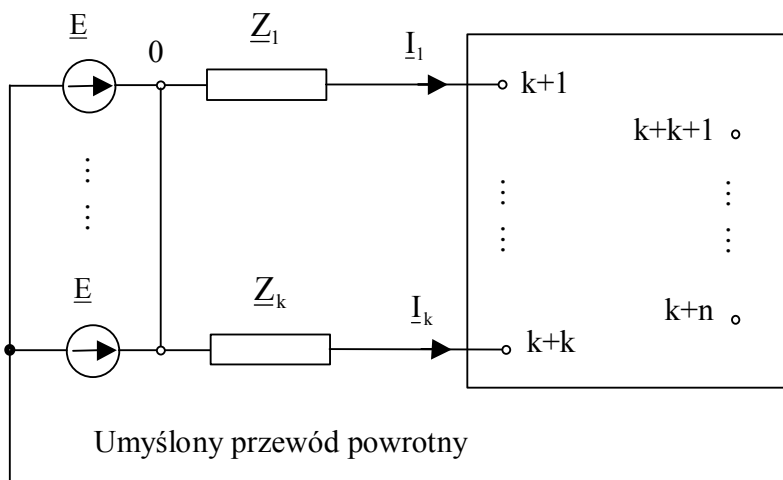
Podmacierz \underline{Y}_{RE} składa się z podmacierzy \underline{Y}_{RR} ze znakiem minus i macierzy zerowej tak jak pokazano poniżej:

$$\underline{Y}_{RE} = [-\underline{Y}_{RR} \quad \mathbf{0}] \quad (2.78)$$

Podmacierz \underline{Y}_{ER} jest macierzą transponowaną w stosunku do \underline{Y}_{RE} :

$$\underline{Y}_{ER} = \begin{bmatrix} -\underline{Y}_{RR} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Rozważmy teraz podmacierz \underline{Y}_{EE} . Jeżeli założymy, że $\underline{E}_1 = \dots = \underline{E}_k = \underline{E}$ to węzły od 1 do k-tego możemy zewrzeć i w tym miejscu przyjąć węzeł odniesienia. Przy zwarcie w węźle m-tym otrzymujemy schemat zastępczy:



Rys. 2.18 Schemat zastępczy sieci wielomaszynowej dla określenia podmacierzy \underline{Y}_{EE} .

W tej sytuacji równanie potencjałów węzłowych dla sieci z rys. 2.19 będzie identyczna jak podczas obliczania prądów zwarciovych czyli:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \underline{I}_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{Y}_{EE} \begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \Delta \underline{U}_{m-1} \\ -\underline{E} \\ \Delta \underline{U}_{m+1} \\ \vdots \\ \Delta \underline{U}_{k+n} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Macierz \underline{Y}_{EE} po odwróceniu i podzieleniu jej na cztery podmacierze dla węzłów ze zbioru $\{k+1 \dots 2k\}$ i $\{2k+1 \dots n\}$ możemy zapisać jako:

$$\underline{Y}_{EE}^{-1} = \underline{Z}_{EE} = \begin{matrix} & \begin{matrix} k+1 \\ \vdots \\ k+k \\ 2k+1 \\ \vdots \\ k+n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Z}_{gg} & \underline{Z}_{gn} \\ \underline{Z}_{ng} & \underline{Z}_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} k+1 \\ \dots \\ 2k \\ 2k+1 \\ \dots \\ k+n \end{matrix} & & \end{matrix} \quad (2.81)$$

Po podstawieniu tych podmacierzy do wzoru (2.74) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_R &= \underline{Y}_{RR} - \begin{bmatrix} -\underline{Y}_{RR} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{gg} & \underline{Z}_{gn} \\ \underline{Z}_{ng} & \underline{Z}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{Y}_{RR} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= \underline{Y}_{RR} - \underline{Y}_{RR} \underline{Z}_{gg} \underline{Y}_{RR} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Podmacierz \underline{Z}_{gg} można zapisać jako:

$$\underline{Z}_{gg} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{k+1,k+1} & \dots & \underline{Z}_{k+1,k+k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}_{k+k,k+1} & \dots & \underline{Z}_{k+k,k+k} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Obliczając występujący we wzorze (2.82) składnik $\underline{Z}_{gg} \underline{Y}_{RR}$ mamy więc:

$$\underline{Z}_{gg} \underline{Y}_{RR} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{k+1,k+1} \frac{1}{\underline{Z}_1} & \dots & \underline{Z}_{k+1,k+k} \frac{1}{\underline{Z}_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}_{k+k,k+1} \frac{1}{\underline{Z}_1} & \dots & \underline{Z}_{k+k,k+k} \frac{1}{\underline{Z}_k} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Po dalszym wymnożeniu powyższej zależności przez \underline{Y}_{RR} i odjęciu tego wyniku od \underline{Y}_{RR} otrzymujemy, że poszczególne elementy macierzy transferowej wyrażają się wzorami:

$$\underline{Y}_{Rii} = \frac{1}{\underline{Z}_i} - \frac{1}{\underline{Z}_i} \underline{Z}_{ii} \frac{1}{\underline{Z}_i} = \frac{\underline{Z}_i - \underline{Z}_{ii}}{\underline{Z}_i^2} \quad (2.85)$$

$$\underline{Y}_{Rij} = -\frac{1}{\underline{Z}_i} \underline{Z}_{ij} \frac{1}{\underline{Z}_j} = -\frac{\underline{Z}_{ij}}{\underline{Z}_i \underline{Z}_j} \quad (2.86)$$

gdzie:

$\underline{Z}_i, \underline{Z}_j$ - impedancja gałęzi łączącej węzły ze zbioru {R} z węzłami ze zbioru {E},

\underline{Z}_{ii} - impedancja własna węzła ze zbioru {R},

\underline{Z}_{ij} - impedancja wzajemna węzłów ze zbioru {R}.

2.4.2. Metoda przekształcania schematu zastępczego sieci

Założmy, że znamy macierz admitancyjną sieci. Eliminujemy k-ty węzeł poprzez przekształcenie gwiazdy w wielobok.

$$\underline{Y}_{ij}^{\text{nowe}} = \underline{Y}_{ij}^{\text{stare}} - \frac{\underline{Y}_{ik}^{\text{stare}} \underline{Y}_{kj}^{\text{stare}}}{\underline{Y}_{kk}^{\text{stare}}} \quad (2.87)$$

Porównajmy ten wzór z algorytmem eliminacji zmiennych rozwiązywania równań liniowych. Z porównania tego wynika, że obliczenie macierzy transferowej \underline{Y}_R to wykonanie poprzez k kroków eliminacji. To co zostaje po tych k krokach to macierz transferowa \underline{Y}_R .

$$\underline{Y}^{k,\text{nowe}} = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \underline{Y}_R \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

2.5. Charakterystyki odbiorów

Odbiory pracujące w SEE pobierają moce zależne od napięć występujących w punktach ich przyłączenia. Moce te są określone przez tzw. statyczne napięciowe charakterystyki odbiorców. W literaturze występuje kilka postaci matematycznych tych charakterystyk. Jedną z nich jest postać wykładnicza:

$$P = P_n \left(\frac{U}{U_N} \right)^{\alpha p} \quad (2.89)$$

$$Q = Q_n \left(\frac{U}{U_N} \right)^{\alpha q} \quad (2.90)$$

Postać tą możemy stosować tylko przy niewielkich odchyleniach napięcia od napięcia znamionowego. Wykładniki α_p i α_q zależą od składu odbiorców. Zwykle wahają się w następujących granicach:

- $\alpha_p=0,4 \div 1,2$
- $\alpha_q=1,2 \div 4,0$

Wartości średnie tych współczynników to: $\alpha_p=0,6$, $\alpha_q=2,0$.

Przypadki charakterystyczne dla α_p , α_q :

- $\alpha_p=\alpha_q=2$

Odbiór można wtedy zastąpić równoległym połączeniem stałą R i X. Wartości te wyznaczamy z wzoru:

$$R_o = \frac{U_N^2}{P_N} = \frac{U^2}{P} = \text{const} \quad (2.91)$$

$$X_o = \frac{U_N^2}{Q_N} = \frac{U^2}{P} = \text{const} \quad (2.92)$$

W modelu tym mamy ze zbyt dużą zależnością mocy czynnej od napięcia.

- $\alpha_p=\alpha_q=1$

Odbiór można wtedy zastąpić stałym prądem

$$I' = \frac{P_N}{\sqrt{3} U_N} = \frac{P}{\sqrt{3} U} = \text{const} \quad (2.93)$$

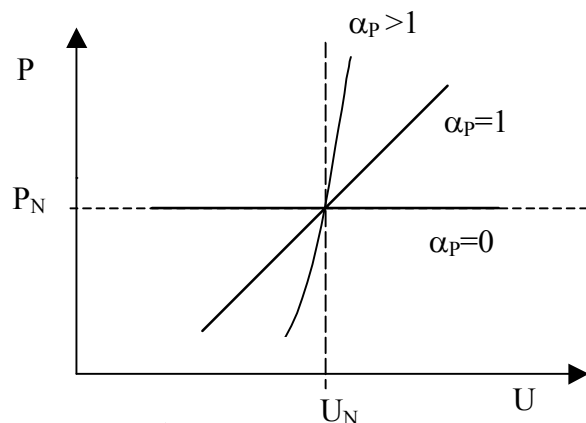
$$-I'' = \frac{Q_N}{\sqrt{3} U_N} = \frac{P}{\sqrt{3} U} = \text{const} \quad (2.94)$$

Prosty w obliczeniach sieci promieniowych, niewygodny do obliczeń w sieciach WN zamkniętych. Zbyt duża zależność mocy czynnej od napięcia.

- $\alpha_p=\alpha_q=0$

Model pobierający stałą moc czynną i bierną. Typowy dla obliczeń w sieciach WN.

Na rys. 2.19 zaprezentowano przykładowe zależności mocy od napięcia.



Rys. 2.19 Zależność mocy od napięcia

Druga postać charakterystyk napięciowych to postacie wielomianowe, np.:

$$P = a_u U - b_u \quad (2.95)$$

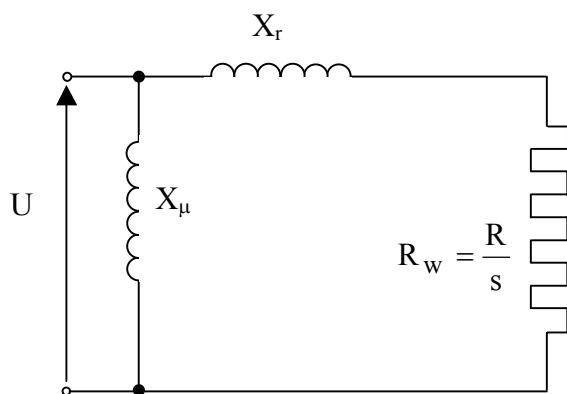
$$Q = c_u U^2 - d_u U - e_u \quad (2.96)$$

Przykładowo dla miast są one postaci:

$$P = 1,5 U - 0,5 \quad (2.97)$$

$$Q = 6,3 U^2 - 10 U + 4,7 \quad (2.98)$$

Rozważymy kilka typów odbiorów. Najważniejszym z odbiorów jest silnik asynchroniczny. Schemat zastępczy silnika asynchronicznego pokazano na rys. 2.20.



Rys. 2.20 Schemat zastępczy silnika asynchronicznego, gdzie:

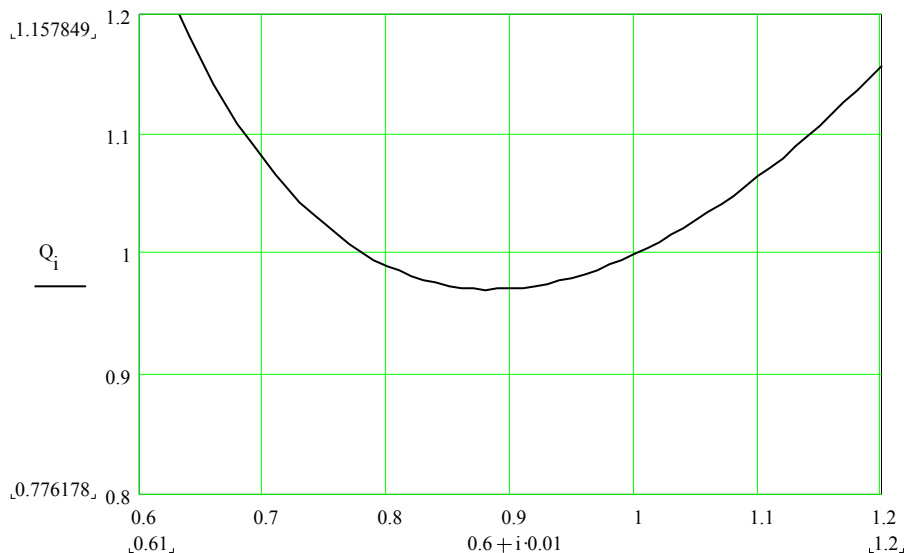
- X_r – reaktancja rozproszenia wirnika,
- X_μ - reaktancja magnesująca silnika,
- R_w – rezystancja wirnika,
- s – poślizg wirnika.

W przypadku, gdy napięcie maleje to rośnie poślizg, co wynika z charakterystyk: momentu elektromagnetycznego i oporowego silnika. Granicznym punktem jest utyk tzn. $s_u=1$. Napięcie, przy którym występuje utyk wynosi:

$$U_{ii} \approx (0,6 \div 0,7) U_N \quad (2.99)$$

Zgodnie ze schematem rośnie prąd a więc moc bierna Q_x płynąca przez wirnik:

$$Q_X = Q_{XN} \left(\frac{U_N}{U} \right)^2 \quad (2.100)$$



Rys. 2.21 Zależność mocy biernej pobieranej przez silnik asynchroniczny od napięcia

Całkowita moc bierna pobierana przez silnik równa sumie mocy magnesującej i powyżej zdefiniowanej wynosi:

$$Q = Q_{\mu} + Q_X = \frac{a_1}{U^2} + a_2 U^2 \quad (2.101)$$

Przykładowy przebieg zależności mocy biernej pobieranej przez silnik asynchroniczny od napięcia przedstawia rys. 2.21.

Przebieg poboru mocy czynnej pobieranej przez silnik asynchroniczny przy zmianach napięcia zależy od charakterystyki momentu oporowego. Jeżeli $M_o = \text{const}$, to $i P = f(U) \approx \text{const}$.

2.6. Charakterystyki źródeł

2.6.1. Charakterystyka węzła

Rozpatrzmy linię elektroenergetyczną przy następujących założeniach:

- zasilanie w węźle 1 z sieci o parametrach $R_S=0$, $X_S \neq 0$,
- pomijamy rezystancją linii tzn. $R_L=0$, $X_L \neq 0$,
- $X_S \ll X_L$,
- na końcu linii mamy odbiór pobierający moce P_o oraz Q_o przy napięciu $U_2=U_N$.

W takiej sytuacji spadek napięcia wyniesie:

$$\delta U \cong \frac{Q_0 X_L}{U_2} \quad (2.102)$$

$$\frac{\delta U}{U_N} \cong \frac{Q_0 X_L}{U_N^2} \quad (2.103)$$

Rozważmy zwarcie trójfazowe na końcu linii. Moc zwarciova przy powyższych założeniach wynosi:

$$S_Z = \frac{1.1 U_N^2}{X_L} \quad (2.104)$$

Wzór na spadek napięcia można napisać w postaci:

$$\frac{\delta U}{U_N} \cong 1.1 \frac{Q_0}{S_Z} \quad (2.105)$$

Wnioski:

- Czym większa moc zwarciova w węźle tym mniejsze spadki napięcia wywołuje przepływ mocy tzn. napięcie mniej reaguje na zmianę obciążenia. Mówimy, że sieć jest sztywniejsza.
- Gdyby moc zwarciova wynosiła nieskończoność to jest to tzw. sieć sztywna. Wtedy napięcie w węźle jest stałe niezależne od obciążenia.

2.6.2. Charakterystyki napięciowe generatora

Wzór na napięcie w węźle początkowym przy założeniu, że napięcie w węźle końcowym jest osi odniesienia a linia jest obciążona mocą czynną i bierną, jest postaci:

$$\underline{U}_A = U_B + \frac{P_B R + Q_B X}{U_B} + j \frac{P_B X - Q_B R}{U_B} \quad (2.106)$$

W przypadku, gdy rozważanym elementem jest generator to:

- możemy pominąć rezystancję,
- napięcie \underline{U}_A jest równe sile elektromotorycznej E_d generatora.

Siła elektromotoryczna E_d generatora wynosi:

$$\underline{E}_d = U_G + \frac{Q_B X_d}{U_G} + j \frac{P_B X_d}{U_G} \quad (2.107)$$

Moduł siły elektromotorycznej E_d generatora można wyznaczyć z zależności:

$$E_d = \sqrt{\left(U_G + \frac{Q_B X_d}{U_G} \right)^2 + \left(\frac{P_B X_d}{U_G} \right)^2} \quad (2.108)$$

Jeśli założyć następujące parametry w jednostkach względnych:

- $U_G=1$,

- $X_d=2$,
- $P_B=0.8$, $Q_B=0.6$,

to moduł siły elektromotorycznej E_d generatora wynosi:

$$E_d = \sqrt{\left(U_G + \frac{Q_B X_d}{U_G}\right)^2 + \left(\frac{P_B X_d}{U_G}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{0.6 \cdot 2}{1}\right)^2 + \left(\frac{0.8 \cdot 2}{2}\right)^2} = 2.72 \quad (2.109)$$

Powyższą zależność można następująco przekształcić:

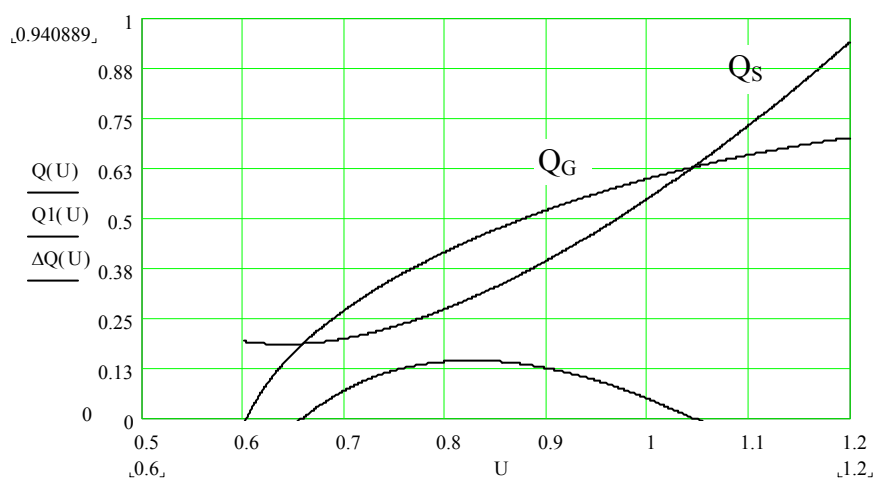
$$E_d^2 = \left(U_G + \frac{Q_B X_d}{U_G}\right)^2 + \left(\frac{P_B X_d}{U_G}\right)^2 \quad / \frac{U_G^2}{X_d^2} \quad (2.110)$$

$$\left(\frac{E_d U_G}{X_d}\right)^2 = \left(\frac{U_G^2}{X_d} + Q_B\right)^2 + (P_B)^2 \quad (2.111)$$

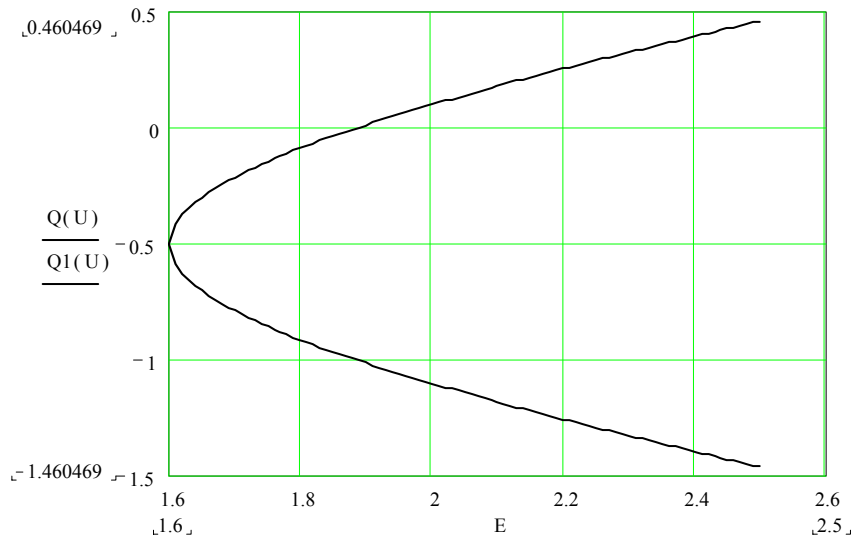
$$\frac{U_G^2}{X_d} + Q_B = \pm \sqrt{\left(\frac{E_d U_G}{X_d}\right)^2 - (P_B)^2} \quad (2.112)$$

$$Q_B = \pm \sqrt{\left(\frac{E_d U_G}{X_d}\right)^2 - (P_B)^2} - \frac{U_G^2}{X_d} \quad (2.113)$$

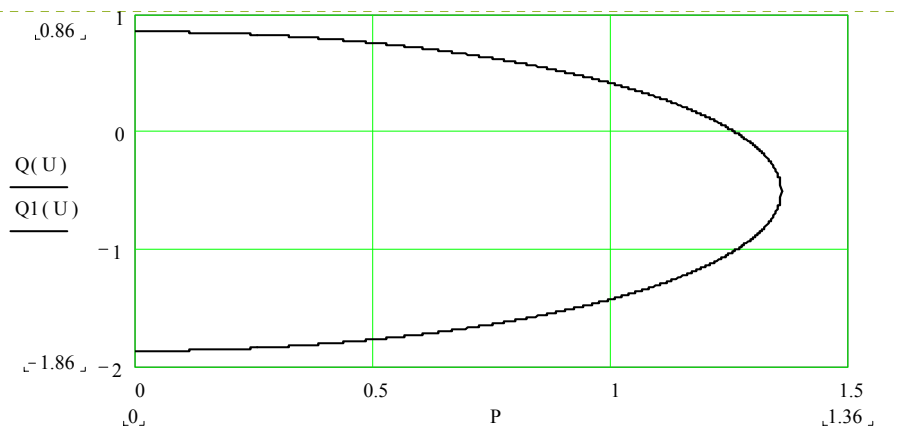
Zależność mocy biernej Q_B od napięcia U_G , siły elektromotorycznej E_d oraz mocy czynnej P_B zostanie zaprezentowana na poniższych wykresach.



Rys. 2.22 Zależność mocy biernej produkowanej przez generator synchroniczny od napięcia oraz zależność mocy biernej pobieranej przez silnik asynchroniczny Q_s od napięcia



Rys. 2.23 Zależność mocy biernej produkowanej przez generator synchroniczny w funkcji siły elektromotorycznej



Rys. 2.24 Zależność mocy biernej produkowanej przez generator synchroniczny w funkcji mocy czynnej

2.6.3. Dopuszczalny obszar pracy generatora

Dopuszczalny obszar pracy generatora synchronicznego jest ograniczony przez następujące czynniki:

- Prąd generatora musi być mniejszy równy od prądu znamionowego tego generatora czyli:

$$I_G \leq I_{NG} \quad (2.114)$$

Powyższe równanie można zapisać jako:

$$P_G^2 + Q_G^2 \leq (\sqrt{3} U_{NG} I_{NG})^2 \quad (2.115)$$

Równanie powyższe tworzy okrąg na płaszczyźnie P, Q o środku w początku układu współrzędnych i promieniu równym mocy znamionowej pozornej generatora. Na rys. 2.25 charakterystyka ta została oznaczona cyfrą 1.

- Moc generatora musi być większa równa od mocy minimalnej bloku czyli:

$$P_G \geq P_{G \min} \quad (2.116)$$

Na rys. 2.25 charakterystyka ta została oznaczona cyfrą 2.

- Moc generatora musi być mniejsza lub równa od mocy maksymalnej bloku czyli:

$$P_G \leq P_{G \max} \quad (2.117)$$

Na rys. 2.25 charakterystyka ta została oznaczona cyfrą 3.

- Siła elektromotoryczna generatora musi być mniejsza lub równa od maksymalnej siły elektromotorycznej, czyli:

$$\left(\frac{U_G^2}{X_d} + Q_G \right)^2 + (P_G)^2 \leq \left(\frac{E_{d \max} U_G}{X_d} \right)^2 \quad (2.118)$$

Równanie powyższe tworzy okrąg na płaszczyźnie P, Q o środku w punkcie $\left(-\frac{U_G^2}{X_d} \right)$ i promieniu równym $\left(\frac{E_{d \max} U_G}{X_d} \right)$. Na rys. 2.25 charakterystyka ta została oznaczona cyfrą 4.

- Kąt pomiędzy siłą elektromotoryczną generatora a napięciem sieci sztywnej musi być mniejszy lub równy od maksymalnej jego wielkości czyli:

$$\delta_{E_d U_S} \leq \delta_{\max} \quad (2.119)$$

Równanie to można zapisać w postaci:

$$\operatorname{tg}(\delta_{E_d U_S}) = \frac{P_G}{Q_G + \frac{U_G^2}{X_d}} \leq \operatorname{tg}(\delta_{\max}) \quad (2.120)$$

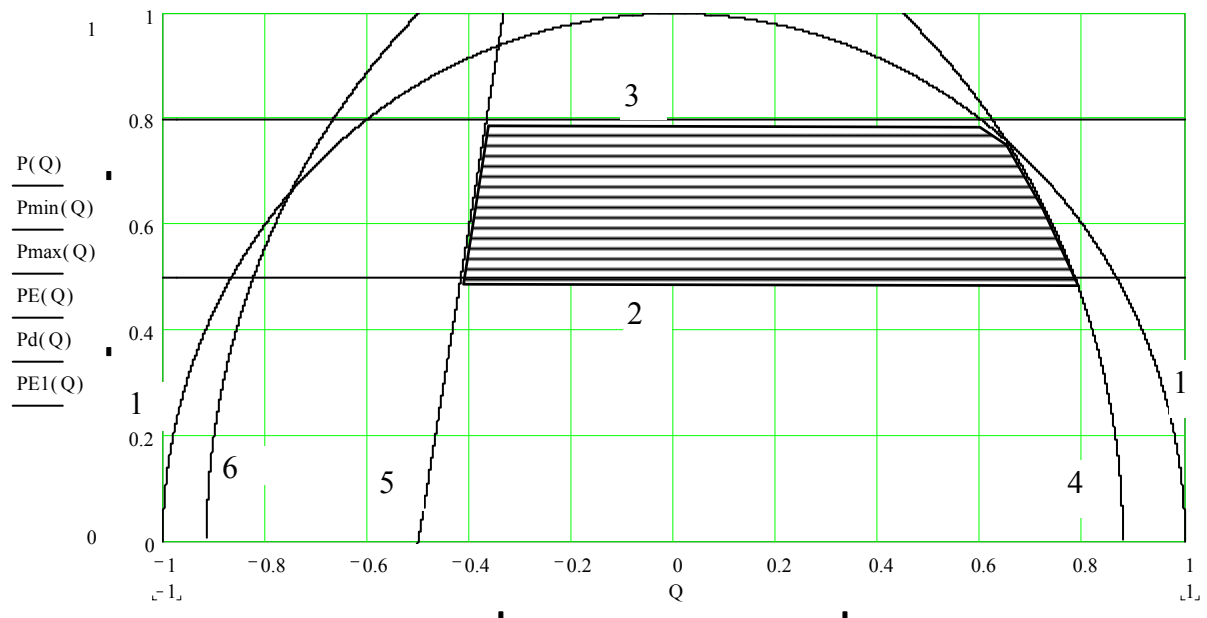
Równanie powyższe tworzy prostą o początku w punkcie $\left(-\frac{U_G^2}{X_d} \right)$ i nachyleniu równym kątowni δ_{\max} . Na rys. 2.25 charakterystyka ta została oznaczona cyfrą 5.

- Temperatura skrajnych części stali statora musi być mniejszy lub równy od temperatury dopuszczalnej, czyli:

$$\vartheta_{\text{stojana}} \leq \vartheta_{\max} \quad (2.121)$$

Równanie powyższe nie daje się opisać prostą analityczną funkcją. Charakterystyka taka jest zazwyczaj określana na drodze pomiarowej. Na rys. 2.25 charakterystyka ta została oznaczona cyfrą 5.

Dopuszczalny obszar pracy generatora synchronicznego znajduje się wewnątrz powyższych ograniczeń. Na rys. 2.25 został on zakreskowany. Do wykreślenia tych krzywych wzięto typowe parametry generatora. W warunkach rzeczywistych taką charakterystykę określa się metodami pomiarowymi. Powyższa analiza została wykonana przy założeniu ustalonej pracy generatora a więc przy założeniu, że częstotliwość jest stała. Turbiny są wyposażone w regulatory reagujące na zmiany prędkości obrotowej wału turbiny. Przy stwierdzeniu zmian prędkości obrotowej wału turbiny regulator taki zmienia przepływ pary (wody, gazu) przez turbinę powodując zmianę wytwarzanej mocy mechanicznej a w konsekwencji mocy czynnej generatora. Regulatory takie noszą nazwę regulatorów pierwotnych. Działanie regulatorów pierwotnych zostanie omówione w rozdziale 4.



Rys. 2.25 Dopuszczalny obszar pracy generatora synchronicznego