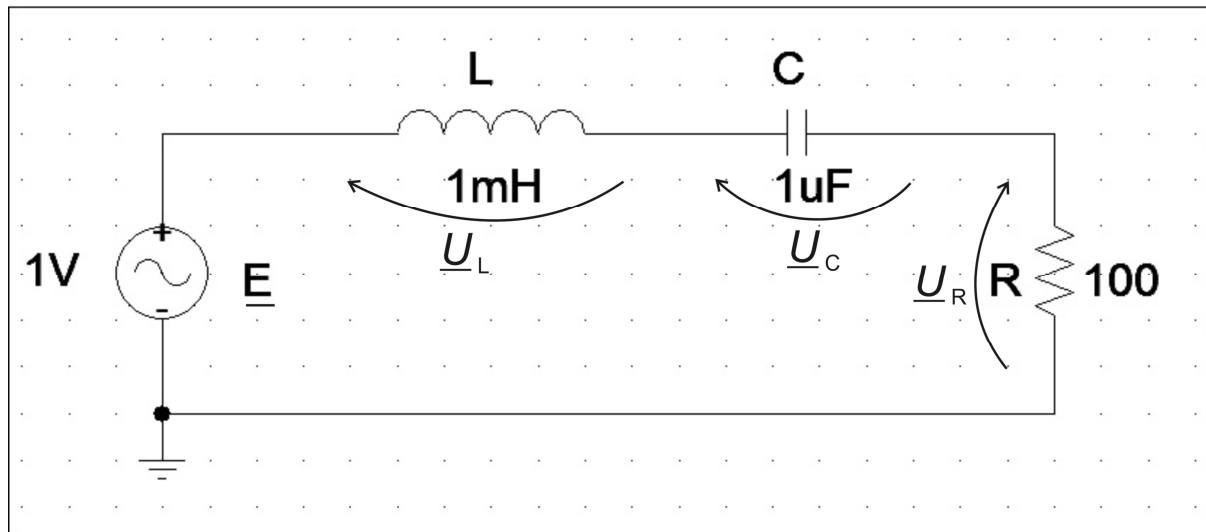


REZONANS W GAŁĘZI SZEREGOWEJ R, L, C



Rys. 1. Obwód RLC.

Napięcia na elementach układu wynoszą:

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}, \quad \underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}, \quad \underline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C} \underline{I}. \quad (1)$$

Rezonans napięć zachodzi, gdy:

$$|\underline{U}_L| = |\underline{U}_C|. \quad (2)$$

Napięcia te w postaci zespolonej mają przeciwny znak, a więc ich suma wektorowa równa się zero:

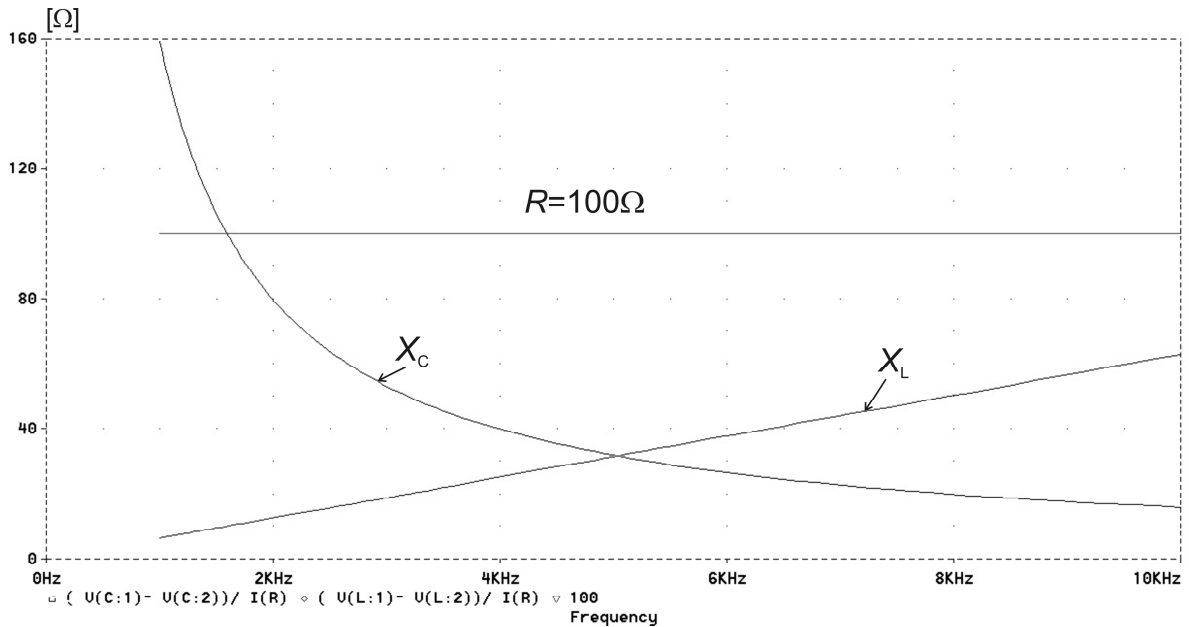
$$\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0. \quad (3)$$

Po podzieleniu przez prąd $\underline{I} \neq 0$:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \quad \text{skąd: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4)$$

Przy rezonansie napięcie prąd osiąga maksimum:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + j\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)} = \frac{\underline{E}}{R}. \quad (5)$$



Rys. 2. Charakterystyki częstotliwościowe rezystancji i reaktancji.

ZALEŻNOŚCI ENERGETYCZNE PRZY REZONANSIE

Energia zgromadzona w cewce:

$$W_L = \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{1}{2} L \cdot I_m^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{4} L \cdot I_m^2 (1 - \cos 2\omega_0 t) \quad (6)$$

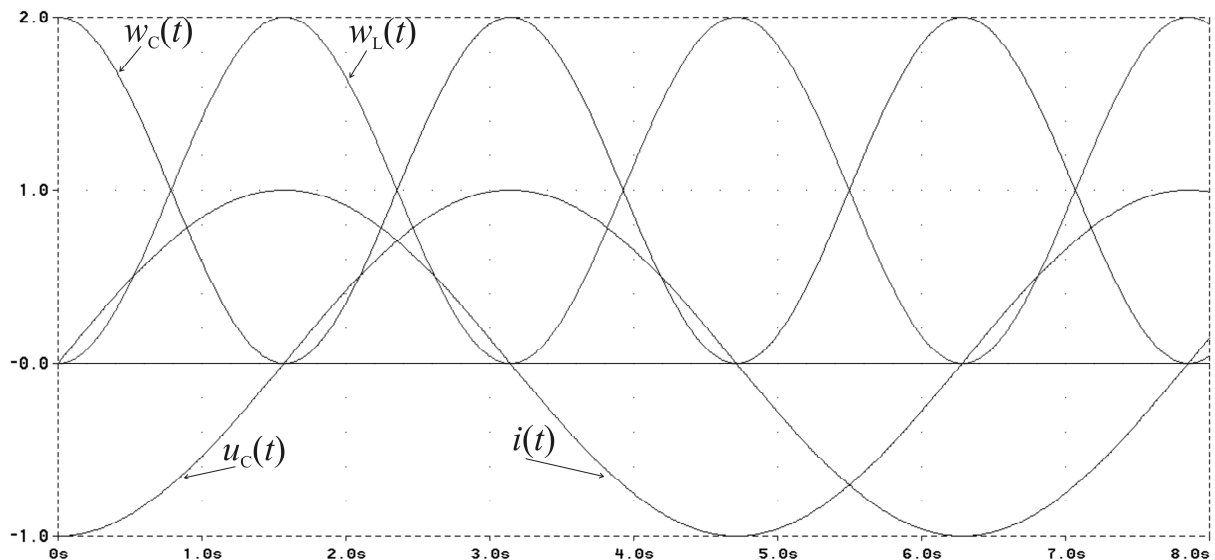
Energia zgromadzona w kondensatorze:

$$W_C = \frac{1}{2} Cu_C^2 = \frac{1}{2} C \cdot U_{Cm}^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{4} C \cdot U_{Cm}^2 (1 + \cos 2\omega_0 t) \quad (7)$$

Energia całkowita układu:

$$W = W_L + W_C = \frac{1}{2} L \cdot I_m^2 \left(\sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 LC} \cos^2 \omega_0 t \right) \quad (8)$$

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I_m^2 = \frac{1}{2} C \cdot U_{Cm}^2$$



Rys. 3. Energia zgromadzona w kondensatorze i w cewce w funkcji czasu.

WIELKOŚCI CHARAKTERYZUJĄCE REZONANS NAPIĘĆ

W rezonansie obie reaktancje są równe impedancji charakterystycznej:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \quad (9)$$

Dobroć obwodu rezonansowego:

$$Q = \frac{\rho}{R} \quad (10)$$

Jest ona zarazem stosunkiem napięć na elementach:

$$Q = \frac{\rho I}{R I} = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R} \quad (11)$$

Dobroć obwodów rezonansowych dowolnego typu wyrażamy wzorem

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{ukł}}}{W_R(T)}, \quad \text{lub: } Q = \omega_0 \frac{W_{\text{ukł}}}{P} \quad (12)$$

Dla obwodu szeregowego RLC wzór ten przyjmuje postać:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L \cdot I_m^2}{T \cdot R \cdot I^2} = \frac{2\pi L}{T \cdot R} = \frac{\omega L}{R} \quad (13)$$

ROZSTROJENIE BEZWZGLĘDNE

Definicja:

$$\xi = \frac{X}{R} \quad (14)$$

Moduł impedancji obwodu można wyrazić przez ξ :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = R\sqrt{1 + \xi^2} \quad (15)$$

a impedancję zespoloną:

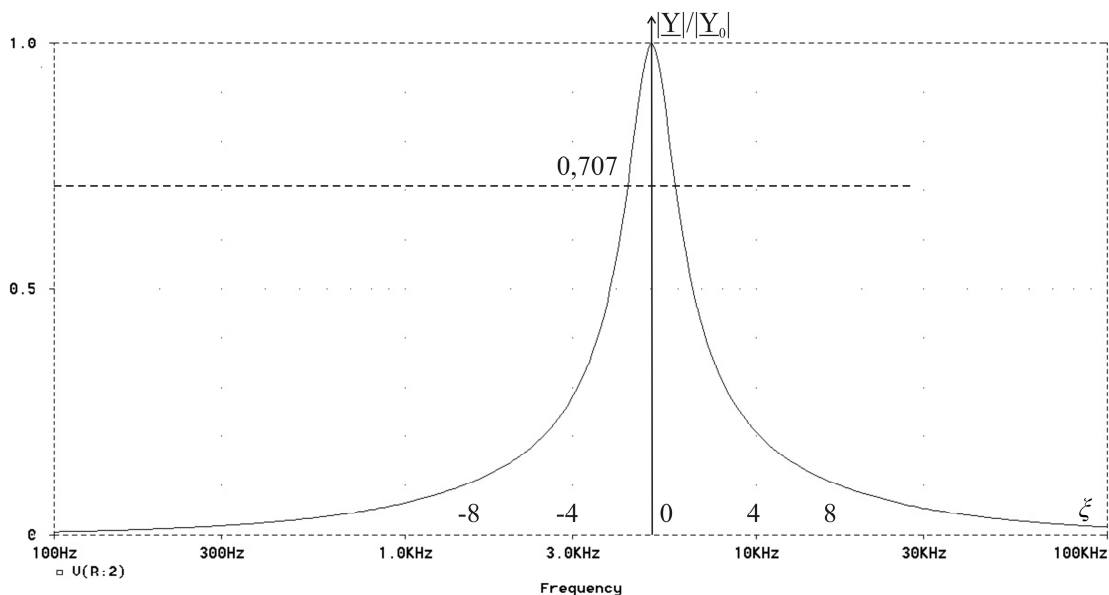
$$\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi} = R\sqrt{1 + \xi^2} e^{j\varphi} \quad (16)$$

W rezonansie $\varphi_0 = 0$, $Z_0 = |\underline{Z}_0| = R$. Wtedy:

$$\frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}_0|} = \sqrt{1 + \xi^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_0} = \sqrt{1 + \xi^2} e^{j\varphi} \quad (17)$$

Podobne wzory można podać dla admitancji:

$$\frac{|\underline{Y}|}{|\underline{Y}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad \text{oraz} \quad \frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j\varphi} \quad (18)$$



Rys. 4. Moduł admitancji w funkcji rozstrojenia bezwzględnego.

ROZSTROJENIE WZGLĘDNE

L i C można wyrazić w funkcji impedancji falowej ρ :

$$L = \frac{\rho}{\omega_0}, \quad C = \frac{1}{\omega_0 \rho} \quad (19)$$

Wypadkowa reaktancja obwodu X :

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \rho \quad (20)$$

Definicja rozstrojenia względnego:

$$\delta = \frac{X}{\rho} \quad (21)$$

Czyli:

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \quad (22)$$

Związek z rozstrojeniem bezwzględnym (Q - dobroć obwodu):

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{X}{\rho} Q = \delta \cdot Q \quad (23)$$

Rozstrojenie względne można w pobliżu ω_0 przedstawić jako:

$$\delta = k - \frac{1}{k} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \cdot \omega_0} = \frac{\omega + \omega_0}{\omega} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2(k - 1) \quad (24)$$

SZEROKOŚĆ PASMA OBWODU REZONANSOWEGO

Pasmem przenoszenia obwodu nazywamy taki zakres częstotliwości, dla którego amplituda prądu $|I|$ jest większa niż $0,707 \cdot |I_0|$. Warunek ten można zapisać inaczej jako:

$$\begin{aligned} 0,707 &\leq \frac{|I|}{|I_0|} \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &\leq \frac{|I|}{|I_0|} \leq 1, \\ -3\text{dB} &\leq 20 \log \frac{|I|}{|I_0|} \leq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Ponieważ

$$\frac{|Y|}{|Y_0|} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{|I|}{|I_0|} \quad (26)$$

odpowiada to wartościom $\xi = \pm 1$, odpowiadającym dolnej i górnej granicy pasma przenoszenia.

Wprowadzając tłumienie obwodu rezonansowego jako:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho} \quad (27)$$

otrzymuje się wartości rozstrojenia względnego dla dolnej i górnej granicy pasma przenoszenia:

$$\delta = \mp d \quad (28)$$

Z definicji rozstrojenia względnego

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} = -d \\ \delta_2 &= \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} = +d \end{aligned} \quad (29)$$

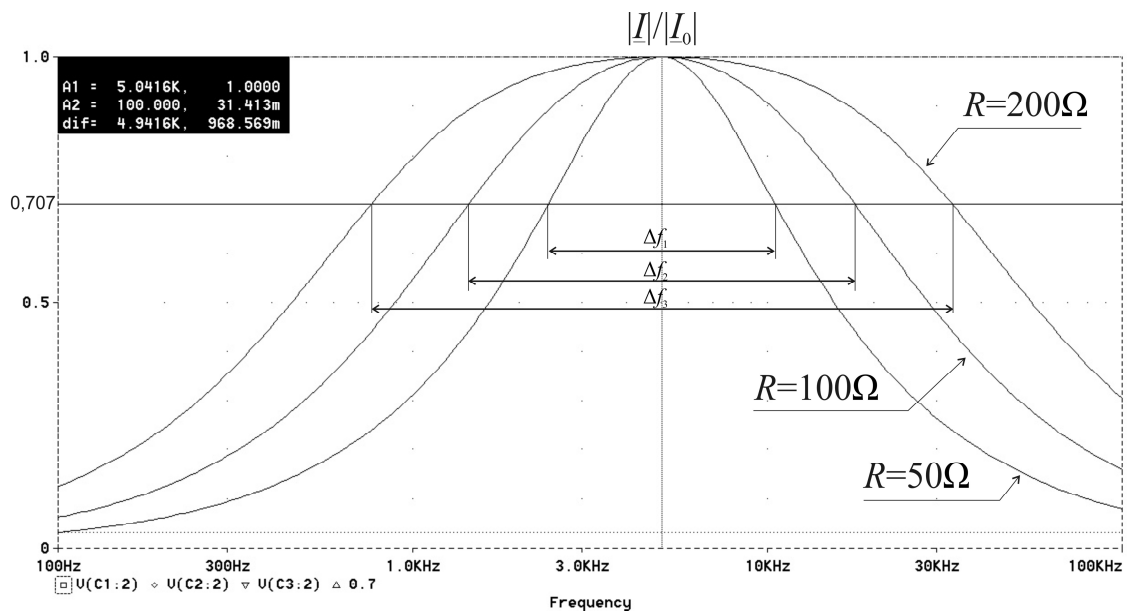
Następnie:

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_0} = -\omega_1 d \quad (30)$$

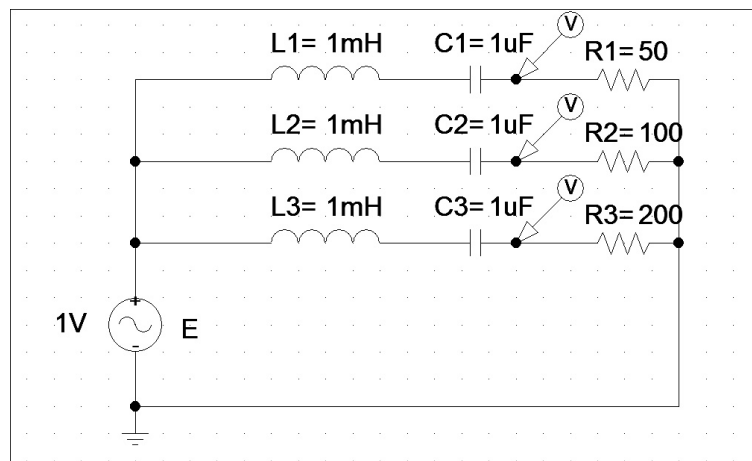
$$\frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\omega_0} = +\omega_2 d$$

Odejmując stronami:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = d = \frac{1}{Q} \quad (31)$$

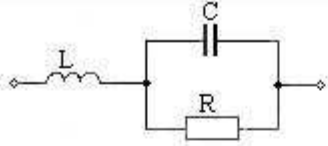
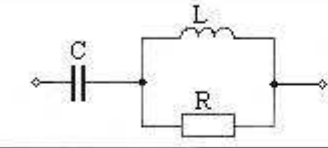
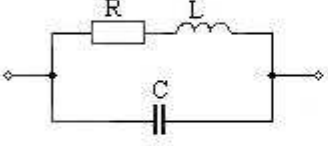
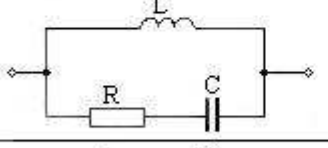
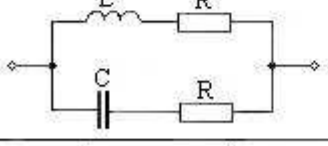
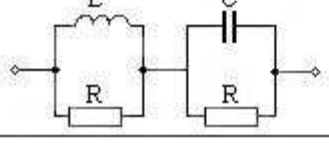


Rys. 5. Charakterystyki obwodu dla różnych rezystancji R .
 $L = 1\text{mH}$, $C = 1\mu\text{F}$.



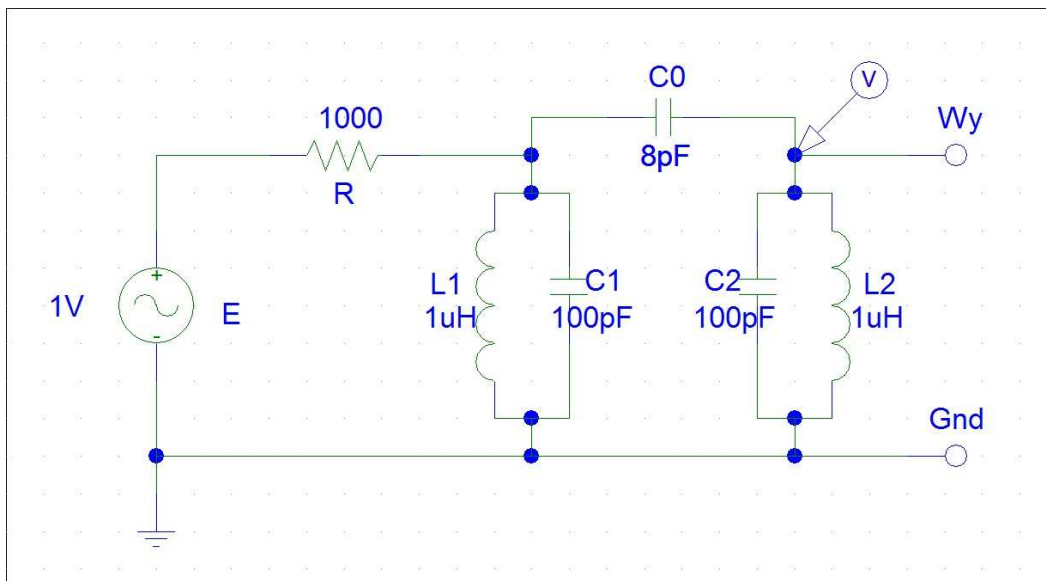
Rys. 6. Schemat układu do analizy przy użyciu SPICE'a.

INNE OBWODY REZONANSOWE

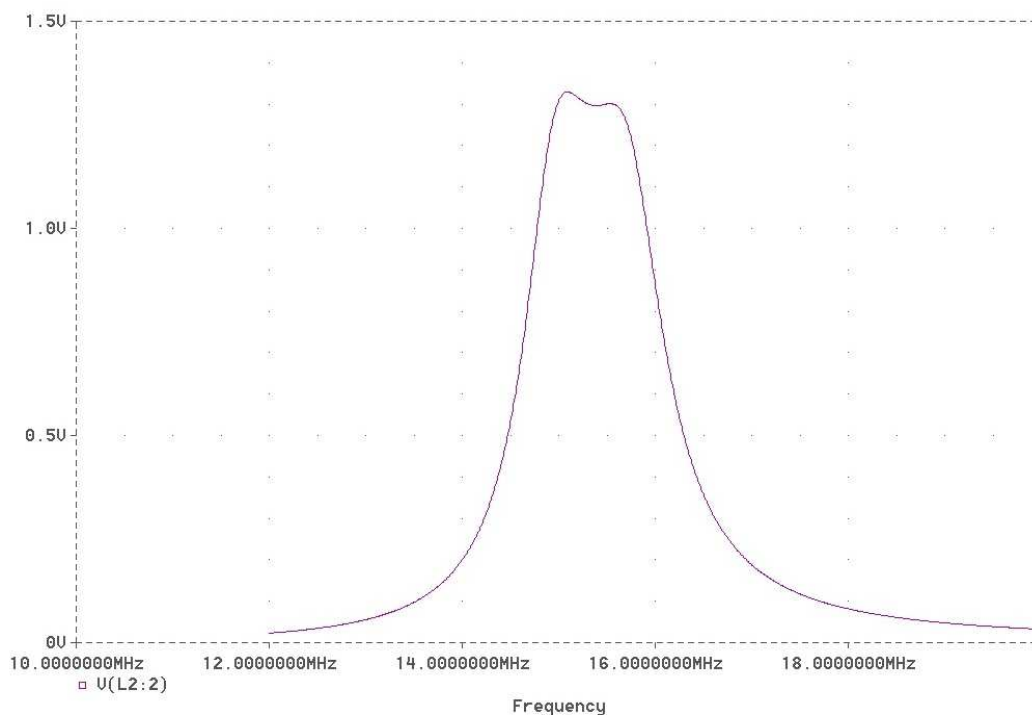
L.p.	Schemat obwodu	Częstotliwość rezonansowa f_{rez}	Impedancja przy rezonansie
1		$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC - \frac{1}{(RC)^2}}}$	$\frac{L}{RC}$
2		$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC - \left(\frac{L}{R}\right)^2}}$	$\frac{L}{RC}$
3		$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$	$\frac{L}{RC}$
4		$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC - (RC)^2}}$	$\frac{L}{RC}$
5		$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$\frac{R}{2} + \frac{L}{2RC}$
6		$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$\frac{2R\frac{L}{C}}{R^2 + \frac{L}{C}}$

Rys. 7. Różne obwody i ich częstotliwości rezonansowe.

FILTR WZMACNIACZA SELEKTYWNEGO



Rys.8. Dwa obwody równoległe LC jako filtr pasmowy



Rys.9. Charakterystyka częstotliwościowa (SPICE)